TOPOLOGIA DE ESPACIOS METRICOS

IGNACIO L. IRIBARREN T.
Director de la División de
Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad Simón Bolívar, Caracas.



EDITORIAL LIMUSA-WILEY, S. A.
México 1973

Primera edición: 1973

Impreso en México

(779)

Prólogo

El concepto abstracto de espacio métrico fue introducido inicialmente por el matemático francés M. Fréchet en 1906 y desarrollado más tarde por el famoso topólogo F. Hausdorff en su "Mengenlehre".

Después de 1920, la topología métrica es objeto de exhaustivas investigaciones que logran su pleno desarrollo y ponen de manifiesto su extraordinario poder unificador de toda una variedad de teorías, hasta entonces dispersas y aparentemente independientes.

Su importancia inicial se atribuye, en parte, a que fuera reconocida como una interesante generalización de la teoría de espacios normados y las aplicaciones de éstos en el naciente análisis funcional, desarrollada por Stephan Banach y sus seguidores.

A su vez, la escuela de Moscú realizaba importantes descubrimientos sobre propiedades de los espacios métricos, con impresionante despliegue de actividad investigadora durante la década 1920-30. Su principal objetivo consistía en obtener condiciones necesarias y suficientes para que un espacio topológico fuese metrizable.

En la actualidad, la topología métrica constituye una rama de la topología general y los espacios métricos un caso particular de los topológicos. Todas las obras de topología general dedican uno o dos capítulos al tratamiento de los espacios métricos. No obstante, estos últimos admiten y merecen un estudio independiente por dos razones. Primero, pueden ser desarrollados en forma de una hermosa teoría acabada, menos inclinada a presentar fenómenos patológicos que la topología general, y, por tanto, más asequible a nuestra intuición geométrica. Segundo, constituyen el fundamento indispensable y más inmediato para un estudio serio y riguroso del análisis matemático, por no mencionar una profusión de teorías sofisticadas.

A pesar de todo, existe un sorprendente vacío de obras dedicadas al desarrollo autónomo de la topología métrica y ello, acompañado de las razones señaladas, nos animó a escribir un libro de esta especie.

Quién dirija su atención a la topología, con el propósito de adquirir las bases necesarias y orientarse luego al aprendizaje riguroso del análisis, hallará frente a sí un vasto y atemorizante cuerpo de doctrina. Para llegar a lo que él requiere (casi exclusivamente espacios métricos y normados), deberá atra-

vesar un largo y dificultoso camino, pocas veces al alcance de la intuición y erizado de sutilezas axiomáticas, contra-ejemplos y extraños fenómenos.

En esta obra presentamos un desarrollo, bastante exhaustivo, de la topología de espacios métricos, con absoluta independencia de la topología general. Vale decir, no suponemos ni apelamos a conocimiento alguno de esta última.

Esperamos además que el lector perciba y disfrute la belleza matemática de esta relevante y depurada teoría como fin en sí, a la par que cimiento esencial.

Este libro tuvo su origen en cursos que, sobre la materia, el autor dictó en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela; sus propios apuntes fueron editados internamente y, se cree, son utilizados hasta el día de hoy en calidad de texto. Posteriormente, él mismo ha enseñado la asignatura de Topología Métrica a estudiantes del tercer año de la carrera de Matemáticas en la Universidad Simón Bolívar. Tales experiencias, por el transcurso de unos seis años, se plasmaron en la elaboración de esta obra.

Desde un punto de vista formal, los únicos conocimientos previos, requeridos para asimilar el contenido de este libro, son los brevemente enunciados en la Introducción. A saber, familiaridad y destreza con las nociones elementales de la teoría de conjuntos, incluyendo lo relativo a funciones, relaciones de equivalencia y orden, excluyendo el axioma de elección y sus equivalentes; estructuras numéricas, principio de inducción, conjuntos contables (que se consideró oportuno tratarlos en dicha Introducción) y, muy particularmente, el cuerpo de los números reales con su propiedad del "sup" columna vertebral de los espacios métricos. Finalmente, y sólo para el último capítulo, los conocimientos más elementales de álgebra lineal.

Realista y pedagógicamente, sería deseable que el lector poseyera cierta madurez matemática (independiente de la biológica), lograda, digamos, después de haber perdido la inocencia en un primer curso de cálculo en una y varias variables.

Sin embargo, hemos tenido muchas consideraciones con el lector, en ocasiones a riesgo de aburrir a alguno más veterano. Todo nuevo concepto se acompaña de motivaciones intuitivas, en un lenguaje llano y ordinario. Se ha procurado siempre destacar la significación y grado de trascendencia de cada teorema, señalando lo que se persigue e indicando el camino.

Al final de cada capítulo se ofrece una colección más o menos numerosa de ejercicios, dependiendo de las posibilidades del tema. Sobre ellos conviene declarar que son totalmente independientes del texto, en el sentido de que jamás se hace uso de alguno como parte integral del desarrollo teórico; a lo más, se cita uno que otro en calidad de contra-ejemplo.

Esto no debe servir de motivo, sin embargo, para que el estudiante prescinda de ellos o interprete que no son importantes. Muy al contrario, los

ejercicios evidencian las posibilidades de la teoría y le confieren una mayor significación. El lector puede medir su dominio del tema enfrentándose con ellos. Algunos, por otra parte, apuntan hacia ramificaciones interesantes.

Consideramos que el libro puede adoptarse como texto y cubrirse totalmente en un semestre. Podría constituir un primer curso de topología destinado a estudiantes de Matemáticas en la mitad de su carrera. Estamos convencidos, no obstante, de que la obra se presta a ser utilizada también y con provecho por alumnos de Ingeniería, Física u otras disciplinas afines, en esclarecidos "pensa" de esas ciencias. Para ellos recomendamos el siguiente plan de estudio simplificado, que no rompe la hilación lógica del desarrollo:

Capítulo I, secciones 1.1 y 1.4.
Capítulo II, secciones 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 y 2.6.
Capítulo III, secciones 3.1 y 3.5.
Capítulo IV, completo.
Capítulo V, secciones 5.1, 5.2, 5.4, 5.5 y 5.7.
Capítulo VI, secciones 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.6 y 6.8.
Capítulo VII, secciones 7.1 y 7.3.

Por último, y no por ello menos merecido, deseo manifestar mi sincero agradecimiento a la señorita Reina V. Raven, quien con admirable desprendimiento y eficiencia realizó la mecanografía. Mi sentimiento de gratitud para mi esposa por haber sufrido en silencio largos meses de reclusión y a quien dedico la obra.

IGNACIO L. IRIBARREN
Universidad Simón Bolívar, 1972.

Contenido

Introducción

Empecemos con un recuento breve (y en algunos casos algo más extenso) de todos aquellos conocimientos que se supone posee el lector, ya que en el transcurso de la obra serán utilizados con entera libertad, sin citarlos expresamente. Para cualquier consulta al respecto, puede recurrirse a la bibliografía recomendada.

Debemos aceptar que el lector está familiarizado con las nociones elementales de la teoría de conjuntos y que ha adquirido suficiente destreza en su manejo. Para ser más concretos, se requieren conocimientos sobre determinación de un conjunto, inclusión, unión en una familia cualquiera, diferencia y complementación de conjuntos, intersección, distributividad de esta última con respecto a la unión y viceversa; par ordenado y producto cartesiano con sus propiedades fundamentales; relaciones binarias y de orden parcial y total; relaciones de equivalencia, propiedades de las clases de equivalencia y conjunto cociente. Es indispensable un dominio adecuado del concepto de función; imágenes directas e inversas de un conjunto bajo una función; sobreyección, inyección y biyección; función inversa; composición de funciones.

No hace falta haber hecho un estudio axiomático, riguroso, de tales fundamentos, sólo se espera que el lector tenga un poco de práctica en su manipulación y conceptos claros.

La notación conjuntista que se emplea en este libro, en todos los casos, es la usada universalmente.

En vez de proporcionar una especie de resumen pormenorizado de los conocimientos mencionados, preferimos remitir al lector a algunos de los excelentes textos existentes. Al respecto, puede consultar las siguientes obras: (16)*, cuya exposición es informal y entretenida, y (29), si se desea un estudio rigurosamente axiomático y extenso. Recomendamos particularmente el libro (23), de reciente aparición, por su elegancia y rigor.

En lo relativo a teoría de conjuntos y casi todos los otros requisitos que señalaremos, cabe citar de una vez la conocida obra (33), que presenta un panorama mucho más amplio de los fundamentos de la Matemática.

* Los números entre paréntesis se refieren a obras de la bibliografía dada al final del libro.

Sobre los números naturales, cuyo conjunto designamos por $N = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ necesitamos propiedades globales más bien que de carácter aritmético. A saber, que N está *bien ordenado;* es decir, que todo conjunto de números naturales tiene un mínimo. En especial, se usa frecuentemente el *principio de inducción completa* y es preciso que el lector lo conozca bien y lo sepa emplear con soltura. El pequeño y muy didáctico libro (27) se dedica exclusivamente a ello.

Conviene precisar el siguiente concepto que utilizaremos en varias ocasiones.

Decimos que un conjunto no vacío X es *contable* si existe una sobreyección $f : N \to X$.

Por ejemplo, el conjunto N es contable trivialmente, donde la sobreyección es la función idéntica. Asimismo, si X es un conjunto finito es fácil comprobar que es contable. En efecto, podemos expresar $X = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ y definimos la sobreyección $f : N \to X$ tal que $f(i) = x_i$, para $0 \leq i \leq n$, y $f(i) = x_0$, para todo $i > n$.

Si el conjunto Y no es vacío, X es contable y existe una sobreyección $g : X \to Y$, entonces Y es contable. Basta con saber que existe una sobreyección $f : N \to X$, luego, la función compuesta $g \circ f : N \to Y$ es sobreyectiva.

Como consecuencia, probamos con facilidad que, si A es un subconjunto no vacío del conjunto contable X, entonces A es contable. En efecto, la función $g : X \to A$ tal que $\forall x \in A : g(x) = x, \forall x \in X - A : g(x) = a$, donde $a \in A$ es un elemento fijo, es sobreyectiva.

Veamos ahora que el conjunto $N \times N$ es contable.

Es muy sencillo comprobar que la función $f : N \times N \to N$, tal que $\forall m, n \in N : f(m, n) = 2^m \cdot 3^n$, es inyectiva. Por otra parte, su rango M es contable, debido a que $M \subset N$ y lo establecido anteriormente. Luego, la función inversa $f^{-1} : M \to N \times N$ es sobreyectiva y $N \times N$ es contable.

Por último, sea F una familia contable de conjuntos contables. Deseamos demostrar que

$$Y = \bigcup_{X \in F} X$$

es contable.

Existe pues una sobreyección $h : N \to F$ y, como cada $X \in F$ es contable, para todo $n \in N$ existe una sobreyección $f_n : N \to h(n)$. Ahora bien, definamos una función $g : N \times N \to Y$ tal que $\forall m, n \in N : g(m, n) = f_m(n)$.

Resulta entonces que g es sobreyectiva y Y es, por tanto, contable, ya que lo es $N \times N$. En efecto, si $x \in Y$, ha de tenerse que $x \in X$ para algún $X \in F$; pero h es sobreyectiva, luego existe un $m \in n$ con $h(m) = X$ y, como también f_m es sobreyectiva, debe haber un $n \in N$ con $x = f_m(n) = g(m, n)$.

De este resultado fundamental se obtiene la contabilidad del conjunto Q de los números racionales como simple ejercicio

Como se dijera en el Prólogo, el cuerpo de los números reales, cuyo conjunto designamos por R, constituye la columna vertebral de la topología de espacios métricos. Éste puede construirse a partir de los números naturales, por ampliaciones sucesivas, pasando por el conjunto Z de los enteros, y por el cuerpo de los racionales. La construcción es hermosa e interesante, pero laboriosa. Será instructivo para el lector consultarla en (4), donde se trata exhaustivamente.

Sin embargo, debido a la importancia que tienen para nosotros, es oportuno exponer sus propiedades fundamentales, de las cuales se deducen todas las demás. Si se quiere, pueden tomarse como axiomas definitorios. En tal sentido, es interesante destacar que esas propiedades que aquí enumeramos constituyen lo que se llama un sistema axiomático categórico. Esto significa que caracterizan al cuerpo de los números reales y que éste, esencialmente, es único. Vale decir, cualquier otro ente que satisfaga todas esas propiedades es isomorfo con los reales.

El conjunto R está provisto de dos leyes de composición interna u operaciones: $+$ (suma) y $\cdot$ (producto).

La estructura $(R, +)$ es un grupo conmutativo. Es decir, la suma es asociativa y conmutativa; existe un elemento único $0 \in R$ tal que $\forall x \in R$: $x + 0 = x$; a cada $x \in R$ corresponde un único elemento $-x \in R$ con $x + (-x) = 0$.

La estructura $(R - \{0\}, \cdot)$ es también un grupo conmutativo. O sea que el producto es asociativo y conmutativo; existe un elemento único $1 \in R - \{0\}$ tal que $\forall x \in R$ (se prueba que también para $x = 0$) $: x \cdot 1 = x$; a cada $x \in R - \{0\}$ corresponde un único $x^{-1} \in R$ con $x \cdot x^{-1} = 1$.

El producto es distributivo con respecto a la suma.

La estructura algebraica descrita $(R, +, \cdot)$ es la denominada cuerpo.

Sobre R existe una relación de orden total $\leq$, que es compatible con la suma y producto. Es decir, si para $x, y \in R$ se tiene $x \leq y$, entonces $\forall z \in R : x + z \leq y + z$; además, para todo $z \in R$ con $0 \leq z$, $xz \leq yz$.

La estructura $(R, +, \cdot, \leq)$ es ahora un cuerpo totalmente ordenado; según la terminología acostumbrada. Pero existen muchos cuerpos totalmente ordenados que son distintos (no son isomorfos) al de los números reales. Lo que distingue y caracteriza a este último es la llamada propiedad del "sup" que explicamos en seguida.

Supongamos que A es un conjunto no vacío de números reales. Si existe un $x \in R$ tal que $\forall a \in A : a \leq x$, decimos que x es cota superior de A y que A es un conjunto acotado superiormente. Ahora bien, la propiedad del "sup" nos dice que existe un número real z que es el mínimo de las cotas superiores de A; es decir, z es cota superior y $z \leq x$, para toda cota superior x de A. De otra manera, si $y < z$, entonces y no es cota superior. Es claro que z es único y se denomina extremo superior de A; escribiéndose $z = \sup A$.

En resumen, todo conjunto de números reales acotado superiormente, admite extremo superior.

Lo expuesto sobre el número real es lo que podríamos llamar el esqueleto esencial. Repetimos que todas sus propiedades conocidas se deducen de éstas y recordamos (4), en caso de necesidad.

Conviene destacar dos atributos más de los números reales que, como dijimos, se infieren de los señalados.

R es lo que suele llamarse un cuerpo arquimediano. Esto quiere decir que, si $x, y \in R$, $0 < x < y$, entonces existe un $n \in N$ tal que $y < nx$.

Por otra parte, considerando Q como subconjunto de R, si $x, y \in R$, $x < y$, entonces existe un $q \in Q$ tal que $x < q < y$. Esto se describe diciendo que "Q es denso en R".

Sólo para el último capítulo (VII) se requieren conocimientos previos de álgebra lineal. Concretamente, concepto de espacio vectorial sobre R y sus propiedades más elementales; dependencia e independencia lineal; dimensión finita y bases; isomorfismo entre espacios vectoriales; subespacios y su dimensión; transformaciones lineales, núcleo y rango, su composición, transformación inversa. En todo caso, la mayoría de las veces recordamos expresamente los conceptos al utilizarlos.

De nuevo preferimos remitir al lector a las obras pertinentes. Entre la abrumadora cantidad de textos de álgebra lineal seleccionamos (15) y (13), ambos de bondad reconocida. El primero es asequible y elemental; en cuanto al segundo, se trata de una excelente y ambiciosa obra que no aconsejamos a quien se enfrente con esa teoría por vez primera.

CAPITULO I

Espacios métricos

1.1. DEFINICION Y CASOS PARTICULARES IMPORTANTES

Desde un punto de vista intuitivo, un espacio métrico es, simplemente, un conjunto en donde podemos hablar de la "distancia" entre sus elementos. Se trata de una extraordinaria generalización del plano geométrico, como veremos luego.

Se hace necesario pues definir lo que se entiende por distancia entre dos elementos cuya naturaleza específica desconocemos. Para ello debemos descubrir aquellas propiedades esenciales que caracterizan la noción de distancia para luego definirla en abstracto como el ente poseedor de esas propiedades. Pero aquí se pone de manifiesto un asunto por cuya dilucidación debemos comenzar: ¿qué clase de ente es una distancia?

Si al abstraer deseamos respetar aquello que es esencial a la idea, podemos decir de inmediato que la distancia entre dos elementos es un número real positivo. Pero no basta a nuestros propósitos el considerar la distancia entre dos elementos particulares sino para todo par de elementos del conjunto en cuestión. Es decir, que para dos elementos cualesquiera x, y, existe un número real positivo que podemos designar $d(x, y)$ y al cual llamamos distancia de x a y. Se destaca que la distancia, a la cual preferiremos llamar métrica, es más bien una función, según la cual, a todo par de elementos asocia un número real positivo.

Procedemos a la definición matemática y precisa. El lector reconocerá las propiedades de la métrica como características de la noción de distancia que él conoce intuitivamente.

Como consecuencia del origen geométrico del concepto de espacio métrico, la terminología empleada se toma de aquella disciplina. Esto tiene la ventaja de apelar constantemente a una visión geométrica de las situaciones, facilitando así el entendimiento y ofreciendo la posibilidad de presentir los resultados.

No entraremos a discutir las complejas razones por las cuales se eligen precisamente esas cuatro propiedades para definir la métrica, ni porque ellas resultan suficientes a nuestros propósitos. Baste decir que se trata de un sistema axiomático definitorio de espacio métrico, de la misma forma que un grupo se define mediante un conjunto de axiomas que atribuyen ciertas propiedades a su ley de composición interna.

Sea E un conjunto cualquiera, no vacío, cuyos elementos llamaremos puntos.

Una *métrica* en E es una función

$$d: E \times E \to R$$

que posee las siguientes propiedades:

1. $\forall x, y \in E: d(x,y) \geq 0$
2. Para $x, y \in E: d(x,y) = 0 \iff x = y$.
3. $\forall x, y \in E: d(x,y) = d(y,x)$ (simetría).
4. $\forall x, y, z \in E: d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ (desigualdad triangular).

La expresión $d(x,y)$ la leemos distancia entre los puntos x y y.

El par (E,d), constituido por el conjunto E y una métrica definida sobre E, se denomina *espacio métrico.*

Conviene destacar de una vez que sobre un mismo conjunto E pueden, en general, definirse métricas distintas, las cuales dan origen a espacios métricos diferentes. Esto se verá en los ejemplos y ejercicios.

Las cuatro propiedades que posee una métrica constituyen un sistema de axiomas consistentes, aunque éstos no son independientes. Mediante una sencilla verificación se comprueba que 2 y 4 implican 1 y 3 (ver ejercicio 1, al final del capítulo).

Un modelo intuitivo natural de espacio métrico es el plano geométrico, en el cual interpretamos con facilidad las propiedades de la distancia. La primera nos dice que la distancia entre dos puntos es siempre un número real positivo o cero; la segunda establece que la distancia es cero si y sólo si los puntos coinciden. La tercera propiedad simétrica indica que la distancia de x a y es igual a la de y a x. Finalmente, la cuarta propiedad nos

dice que un lado de un triángulo nunca tiene longitud mayor que la suma de las longitudes de los otros dos lados; de allí el nombre de desigualdad triangular.

Si debilitamos la propiedad 2, escribiendo solamente $\forall x \in E : d(x, x) = 0$, estamos permitiendo la posibilidad de que existan $x, y \in E$ con $x \neq y$, $d(x, y) = 0$. Naturalmente que d no es ya una métrica y recibe el nombre de seudométrica o écart, del francés. Su importancia en Topología es considerable, pero su estudio escapa al ámbito de esta obra. Un écart induce una métrica, a través de una relación de equivalencia. Véase el Ejercicio 4.

En el lema siguiente se establecen desigualdades que resultarán de mucha utilidad y que son consecuencia directa de los axiomas definitorios de una métrica.

Lema 1. En un espacio métrico (E, d) se verifica

$$\forall x, y, z, t \in E : |d(x, y) - d(z, t)| \leq d(x, z) + d(y, t).$$

En particular:

$$\forall x, y, z \in E : |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y).$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicamos dos veces la desigualdad triangular:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \leq d(x, z) + d(y, t) + d(z, t)$$

de donde

$$d(x, y) - d(z, t) \leq d(x, z) + d(y, t) \tag{1}$$

Procediendo de manera similar:

$$d(z, t) \leq d(z, x) + d(t, x) \leq d(x, z) + d(y, t) + d(x, y),$$

de donde

$$-d(x, z) - d(y, t) \leq d(x, y) - d(z, t) \tag{2}$$

Las desigualdades (1) y (2) equivalen a:

$$|d(x, y) - d(z, t)| \leq d(x, z) + d(y, t).$$ ●

Pasamos a mostrar una variedad de ejemplos de espacios métricos particulares. Muchos de éstos tienen importancia considerable por sí mismos y todos, vistos en conjunto, ponen de manifiesto la gran generalidad del concepto. Cuando demostramos una propiedad para un espacio métrico abs-

tracto, ésta queda establecida automáticamente para una extraordinaria diversidad de espacios.

Ejemplo 1. Sea E un conjunto cualquiera, no vacío.

Definamos la función

$$d : E \times E \rightarrow R$$

tal que: $\forall\, x, y \in E$:

$$d(x,y) = 1, \quad \text{si } x \neq y; \quad d(x,y) = 0 \quad \text{si } x = y.$$

Se deja al lector la fácil comprobación de que tal función es una métrica para E.

Al espacio métrico resultante (E, d) se le llama *discreto*. Aunque carece de mayor interés, dada su evidente trivialidad, nos indica que todo conjunto no vacío puede proveerse de una métrica. Por otra parte, los espacios discretos se emplean con frecuencia como contra-ejemplos.

Ejemplo 2. Consideremos el conjunto R de los números reales y la función $d(x,y) = |x-y|, \ \forall\, x, y \in R$.

Mediante sencilla aplicación de las propiedades del valor absoluto se comprueba que d es una métrica. Esta confiere a R estructura de espacio métrico, el cual se llama usualmente la "recta real".

Son muchas y muy diversas las métricas que pueden definirse para R. No obstante, a menos que se exprese lo contrario, cuando se considere a R como espacio métrico, se entenderá que la distancia es la definida arriba.

Ejemplo 3. Sea V un espacio vectorial definido sobre el cuerpo R de los números reales.

Una *norma* en V es una función de V en R que posee las propiedades siguientes (adoptaremos la notación $||x||$ para indicar la imagen del vector x, y la llamaremos norma de x):

1. $\forall x \in V : ||x|| \geq 0$.
2. $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = \theta$; donde θ es el vector nulo en V, o elemento neutro respecto a la suma en V.
3. $\forall x \in V, \forall \lambda \in R : ||\lambda x|| = |\lambda|\, ||x||$.
4. $\forall x, y \in V : ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.
   (desigualdad triangular de la norma).

Intuitivamente podemos interpretar la norma como la longitud de vectores, particularmente si pensamos en los vectores del plano o del espacio.

Al par $(V, \|\ \|)$, es decir, a un espacio vectorial provisto de una norma, se le llama *espacio normado.*

Como es de suponer, un mismo espacio vectorial V sobre R puede, en general, proveerse de diversas normas, dando origen a distintos espacios normados.

Demostraremos que todo espacio normado es metrizable, es decir, puede definírsele una métrica inducida por la norma y así considerársele un espacio métrico.

Definamos la función

$$d : V \times V \rightarrow R$$

tal que

$$\forall x, y \in V : d(x, y) = \|x-y\|.$$

Veamos que d es una métrica para V. En efecto, la propiedad 1 de una métrica se cumple trivialmente como consecuencia de la primera propiedad de una norma. Además, si $x = y$, entonces

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|\theta\| = 0;$$

recíprocamente, si $d(x,y) = 0$, entonces $x-y = \theta$, lo que implica $x = y$. Por otra parte,

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |-1|\,\|y-x\| = \|y-x\| = d(y,x).$$

Finalmente,

$$\forall x, y, z \in V:$$

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z) + (z-y)\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = \\ = d(x,z) + d(z,y).$$

O sea que todo espacio normado puede considerarse como un espacio métrico con la métrica definida en base a la norma de la manera descrita. De aquí en adelante y cuando sea necesario trataremos a los espacios normados como métricos, entendiendo siempre la distancia como la inducida por la norma.

Ejemplo 4. Sea V un espacio vectorial definido sobre el cuerpo R de los números reales.

Un *producto interior* en V es una función de $V \times V$ en R con las propiedades siguientes (adoptaremos la notación $x \circ y$ para indicar la imagen del par $(x,y) \in V \times V$):

1. $x \in V,\ x \neq \theta \Longrightarrow x \circ x > 0$ (positivo definido).
2. $\forall x, y \in V : x \circ y = y \circ x$ (simetría).
3. $\forall x, y, z \in V, \forall \alpha, \beta \in R : (\alpha x + \beta y) \circ z = \alpha(x \circ z) + \beta(y \circ z)$ (linealidad por la izquierda).

Al par $(V, \circ)$, es decir, a un espacio vectorial V sobre R junto con un producto interior en V, se le llama *espacio euclídeo.*

De los tres axiomas definitorios del producto interior se deducen inmediatamente las siguientes propiedades:

$$\forall x \in V : \theta \circ x = (0\,\theta) \circ x = 0\,(\theta \circ x) = 0.$$

En particular: $\theta \circ \theta = 0.$

Esto nos permite ampliar 1:

$$\forall\, x \in V : x \circ x \geq 0;\ x \circ x = 0 \Longleftrightarrow x = \theta.$$

La simetría y la linealidad por la izquierda nos proporcionan la linealidad por la derecha:

$$\forall x, y, z \in V, \forall \alpha, \beta \in R :$$
$$x \circ (\alpha y + \beta z) = (\alpha y + \beta z) \circ x = \alpha(y \circ x) + \beta(z \circ x) =$$
$$= \alpha(x \circ y) + \beta(x \circ z).$$

Una propiedad menos evidente es la importantísima desigualdad de Schwarz.

$$\forall x, y \in V : |x \circ y| \leq \sqrt{x \circ x}\,.\ \sqrt{y \circ y}.$$

La demostración es breve. En efecto, si $y = \theta$ ambos miembros de la desigualdad son 0 y ésta se cumple trivialmente. Supongamos que $y \neq \theta$, con lo cual $y \circ y > 0$. Tenemos entonces

$$\forall\, \lambda \in R : (x + \lambda y) \circ (x + \lambda y) \geq 0.$$

Aplicando las propiedades de linealidad, podemos desarrollar el producto interior:

$$x \circ x + 2(x \circ y)\lambda + \lambda^2(y \circ y) \geq 0;$$

pero tal desigualdad es cierta para todo valor real de λ, en particular para

$$\lambda = -\frac{x \circ y}{y \circ y}:$$

$$x \circ x - 2\frac{(x \circ y)^2}{y \circ y} + \frac{(x \circ y)^2}{y \circ y} \geq 0$$

de donde

$$(x \circ y)^2 \leq (x \circ x) \cdot (y \circ y),$$

y extrayendo raíz cuadrada positiva a ambos miembros obtenemos la desigualdad de Schwarz.

Nos proponemos mostrar que todo espacio euclídeo $(V, \circ)$ puede considerarse como normado, definiendo la norma mediante el producto interior. Sea, en efecto:

$$\forall\, x \in V : \|x\| = \sqrt{x \circ x}, \qquad (1)$$

lo cual tiene sentido sabiendo que $x \circ x \geq 0$. Veamos que se trata en verdad de una norma.

Las propiedades 1 y 2 de una norma (ejemplo 3) quedan satisfechas trivialmente. Además,

$$\forall\, x \in V, \forall\, \lambda \in R : \|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x) \circ (\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x \circ x)} =$$
$$= |\lambda|\, \sqrt{x \circ x} = |\lambda|\, \|x\|.$$

Por otra parte, haciendo uso de la desigualdad de Schwarz:

$$\forall\, x, y \in V:$$
$$\|x+y\|^2 = (x+y) \circ (x+y) = \|x\|^2 + 2(x \circ y) + \|y\|^2 \leq$$
$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

de donde

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

De manera que la definición (1) efectivamente proporciona una norma en V. Siempre que se considere un espacio euclídeo como normado se entenderá que la norma es (1).

Refiriéndonos al ejemplo 3, podemos afirmar que todo espacio euclídeo $(V, \circ)$ puede considerarse como métrico, tomando la métrica inducida por la norma, la cual es, a su vez, inducida por el producto interior. En resumen, la métrica natural de un espacio euclídeo es:

$$\forall\, x, y \in V : d(x, y) = \sqrt{(x-y) \circ (x-y)}.$$

Ejemplo 5. Consideremos el conjunto R^n de todas las n-adas ordenadas de números reales. Este es un espacio vectorial respecto a la ley de composición interna:

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)$$

y la ley de composición externa de conjunto de operadores R:

$$\lambda(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n).$$

R^n es, además, un espacio euclídeo con respecto al producto interior:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)\circ(b_1, b_2, \ldots, b_n) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

Se deja al lector la sencilla comprobación de que se trata efectivamente de un producto interior.

En virtud de lo establecido en el ejemplo 4, R^n puede considerarse como espacio métrico con respecto a la métrica siguiente:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

entonces,

$$x-y = (x_1-y_1, x_2-y_2, \ldots, x_n-y_n),$$

luego

$$(x-y)\circ(x-y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2,$$

de donde

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2}. \qquad (2)$$

Muchas métricas diferentes pueden definirse para R^n, pero, a menos que se indique lo contrario, siempre que le consideremos como espacio métrico entenderemos que la métrica empleada es (2).

Obsérvese que si $n = 1$, la métrica para R, definida por (2), es exactamente la descrita en el ejemplo 2.

Ejemplo 6. Sea A un conjunto cualquiera, no vacío. Diremos que una función f, de A en R, es acotada si existe algún número real $M > 0$ tal que

$$\forall x \in A : |f(x)| \leq M.$$

Designemos por $B(A)$ al conjunto de todas esas funciones.

$\forall \quad f, g \in B(A)$, definamos la función

$$f-g : A \to R,$$

tal que

$$\forall x \in A : (f-g)(x) = f(x) - g(x).$$

Si

$$\forall x \in A : |f(x)| \leq M, |g(x)| \leq N,$$

entonces

$$\forall x \in A : |f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M + N,$$

lo cual indica que

$$f-g \in B(A).$$

Consideremos ahora la función

$$d : B(A) \times B(A) \to R,$$

tal que

$$\forall f, g \in B(A) : d(f,g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|.$$

Tal extremo superior existe, ya que, como se vio arriba,

$$|f(x) - g(x)|$$

es un conjunto de números reales acotado superiormente.

Demostraremos que la función d es una métrica en $B(A)$:

$$\forall f, g \in B(A), \forall x \in A : |f(x) - g(x)| \geq 0,$$

lo cual implica

$$d(f,g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)| \geq 0.$$

Para $f, g \in B(A)$, $f = g$ es equivalente a que

$$\forall x \in A : f(x) = g(x),$$

es decir

$$|f(x) - g(x)| = 0,$$

lo que a su vez equivale a

$$d(f, g) = 0.$$

Como

$$\forall x \in A : |f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|,$$

se deduce de inmediato que

$$d(f, g) = d(g, f).$$

Finalmente, si $f, g, h \in B(A)$, se verifica

$$\forall x \in A:$$
$$|f(x) - g(x)| = |(f(x) - h(x))| + h(x) - g(x))| \leq |f(x) - h(x)| + \\ + |h(x) - g(x)|,$$

de donde, utilizando la definición de extremo superior

$$d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g).$$

De manera que $(B(A), d)$ es un espacio métrico. Éste constituye sólo un ejemplo de una clase de espacios métricos que, por su naturaleza, se les llama espacios funcionales. Su importancia en topología y análisis modernos es considerable.

1.2. DISTANCIA ENTRE CONJUNTOS

Sea (E, d) un espacio métrico. Fijemos arbitrariamente un punto $x_0 \in E$ y un conjunto no vacío $A \subset E$.

Designemos por $\{d(x_0, x)\}_{x \in A}$ al conjunto de números reales constituido por las distancias de x_0 a todos los puntos de A. Ese conjunto está acotado inferiormente por 0, lo cual implica que admite extremo inferior no menor que 0.

Adoptemos la notación

$$d(x_0, A) = \inf \{d(x_0, x)\}_{x \in A}$$

Al número real $d(x_0, A) \geq 0$ se le llama, por definición, distancia de x_0 al conjunto A.

Es evidente que si $x_0 \in A$, entonces $d(x_0, A) = 0$; pero el recíproco no es en general cierto. Puede suceder que $d(x_0, A) = 0$ y $x_0 \notin A$. Por ejemplo,

consideremos el espacio métrico R, la recta real, y tomemos un intervalo abierto $A = (a, b)$; es muy sencillo demostrar que $d(a, A) = 0$, y sin embargo, $a \notin A$.

Esta cuestión quedará definitivamente dilucidada más adelante.

Por comodidad definimos $d(A, x_0) = d(x_0, A)$.

Tomemos ahora dos puntos $x_0, y_0 \in E$ y $A \subset E$ no vacío. Tenemos:

$$\forall x \in A : d(x_0, x) \leq d(y_0, x) + d(x_0, y_0),$$

de donde

$$d(x_0, A) \leq d(y_0, A) + d(x_0, y_0). \tag{1}$$

De manera totalmente análoga

$$d(y_0, A) \leq d(x_0, A) + d(x_0, y_0). \tag{2}$$

De (1) y (2) deducimos:

$$-d(x_0, y_0) \leq d(x_0, A) - d(y_0, A) \leq d(x_0, y_0),$$

lo cual es equivalente a:

$$|d(x_0, A) - d(y_0, A)| \leq d(x_0, y_0).$$

Esta desigualdad tendrá significación más adelante.

Tomemos ahora dos conjuntos no vacíos $A, B \subset E$. Designemos por $\{d(x, y)\}_{x \in A,\ y \in B}$ al conjunto de números reales constituido por todas las distancias entre un punto de A y uno de B. Está claro que tal conjunto está acotado inferiormente por 0, por lo cual debe admitir extremo inferior no menor que 0. Expresemos

$$d(A, B) = \inf \{d(x, y)\}_{x \in A,\ y \in B}.$$

Al número real $d(A, B) \geq 0$ lo llamaremos distancia entre los conjuntos A y B.

Si $A \cap B \neq \phi$, es inmediato que $d(A, B) = 0$; pero de nuevo el recíproco no es en general cierto: la distancia puede ser cero aunque los conjuntos sean disjuntos. Un ejemplo sencillo de esta situación resulta si tomamos números reales $a < b < c$; los intervalos $A = (a, b)$, $B = (b, c)$ son evidentemente disjuntos y, sin embargo, $d(A, B) = 0$, como puede comprobar el lector fácilmente. Volveremos sobre esto más adelante.

Por la simetría de la métrica $d(A, B) = d(B, A)$.

El lema que sigue es de frecuente utilidad e intuitivamente satisfactorio.

Lema 1. Si A y B son conjuntos no vacíos en un espacio métrico (E, d), se tiene:

$$d(A, B) = \inf \{d(x, B)\}_{x \in A} = \inf \{d(y, A)\}_{y \in B}.$$

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos únicamente que

$$d(A, B) = \inf \{d(x, B)\}_{x \in A},$$

ya que la otra igualdad se prueba análogamente.

Tomemos un $x \in A$ genérico. Por definición de $d(A, B)$:

$$d(A, B) \leq d(x, y), \forall\, y \in B,$$

lo cual indica que $d(A, B)$ es cota inferior del conjunto

$$\{d(x, y)\}_{y \in B},$$

luego

$$d(A, B) \leq d(x, B)$$

y como $x \in A$ es arbitrario, esta última desigualdad indica que $d(A, B)$ es cota inferior del conjunto

$$\{d(x, B)\}_{x \in A}.$$

Veamos qué es el máximo de las cotas inferiores. Con tal fin, tomemos un $\varepsilon > 0$ real y arbitrario. En virtud de la definición de $d(A, B)$, existe un $x \in A$ y un $y \in B$ tales que

$$d(x, y) < d(A, B) + \varepsilon;$$

pero

$$d(x, B) \leq d(x, y),$$

o sea

$$d(x, B) < d(A, B) + \varepsilon$$

para algún $x \in A$.

De manera que

$$d(A, B) = \inf \{d(x, B)\}_{x \in A}.$$

Conviene destacar que no es en general cierto que exista un $y_0 \in A$ tal que

$$d(x_0, y_0) = d(x_0, A);$$

análogamente, tampoco es de esperar que existan $x_0 \in A$, $y_0 \in B$ con

$$d(x_0, y_0) = d(A, B).$$

Volveremos sobre esto posteriormente.

1.3. ISOMETRIA

Supongamos que se ha establecido una correspondencia biunívoca entre los puntos de dos espacios métricos y resulta ser, además, que la distancia entre cualquier par de puntos del primer espacio es igual a la distancia entre sus homólogos en el segundo. ¿En qué pueden diferir estos espacios? Sin duda que la naturaleza específica de los puntos en uno y otro puede ser muy distinta; pero en su comportamiento como espacios métricos no puede señalarse diferencia alguna. En efecto, si hacemos caso omiso de la naturaleza particular de los puntos, los espacios resultan idénticos, isomorfos o, para darles el nombre acostumbrado, isométricos.

Espacios isométricos son pues idénticos como espacios métricos, comparten la misma estructura. Es un concepto análogo al isomorfismo entre espacios vectoriales, entre grupos o anillos, etc.

Expresemos formalmente la definición:

Un espacio métrico (E, d) es *isométrico* al (E^1, d^1) si existe una biyección:

$$f : E \to E^1$$

tal que

$$\forall\, x, y \in E : d(x, y) = d^1(f(x), f(y)).$$

La isometría es una relación de equivalencia en la clase de los espacios métricos. En efecto:

Reflexividad: (E, d) es isométrico consigo mismo bajo la biyección idéntica: $E \to E$ (trivial).
Simetría: Supongamos que (E, d) es isométrico al (E^1, d^1) bajo la biyección:

$$f : E \to E^1.$$

Entonces $f^{-1} : E^1 \to E$ es una biyección y

$$\forall x^1, y^1 \in E^1 : d(f^{-1}(x^1), f^{-1}(y^1)) = d^1(f[f^{-1}(x^1)], f[f^{-1}(y^1)]) = d^1(x^1, y^1),$$

lo cual implica que (E^1, d^1) es isométrico al (E, d).
Transitividad: Sea (E, d_1) isométrico al (F, d_2), bajo la biyección f, y (F, d_2) isométrico al (G, d_3), bajo la biyección g. Entonces

$$g \circ f : E \to G$$

es una biyección tal que $\forall\, x, y \in E$:

$$d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y)) = d_3(g[f(x)], g[f(y)]) =$$
$$= d_3(g \circ f(x), g \circ f(y)).$$

O sea que (E, d_1) es isométrico al (G, d_3).

Como ejemplo ilustrativo considérese el conjunto C de los números complejos. Se comprueba fácilmente que

$$d_1(z, w) = |z - w|, \ \forall\, z, w \in C,$$

es una métrica para C, de manera que (C, d_1) es un espacio métrico.

Consideremos, por otra parte, al espacio métrico R^2, tal como se construyó en el ejemplo 5 de 1.1.

Es inmediato verificar que la función

$$f : R^2 \to C, \text{ tal que } \forall\ (a, b) \in R^2$$
$$f(a, b) = a + bi,$$

es una biyección que establece una isometría entre los espacios R^2 y C.

1.4. SUBESPACIOS

Sea (E, d) un espacio métrico y F un subconjunto cualquiera, no vacío de E.

Definamos la función

$$d^1 : F \times F \to R$$

tal que

$$\forall\, x, y \in F : d^1(x, y) = d(x, y).$$

De inmediato se comprueba que d^1 es una métrica para el conjunto F. A d^1 suele llamársele métrica inducida en F por d y, por sencillez, se acos-

tumbra designar también por d sin peligro de confusión. Nótese que d^1 no es otra cosa que la restricción de d a $F \times F$.

De manera que (F, d) es, a su vez, un espacio métrico y se le llama *subespacio* de (E, d).

Se destaca que F es cualquier subconjunto no vacío de E.

EJERCICIOS

1. E es un conjunto no vacío y $d : E \times E \to R$ una función que posee las propiedades siguientes:

   a) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$, para $x, y \in E$.
   b) $\forall x, y, z \in E : d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

   Demostrar que d es una métrica sobre E.

2. Sea d una métrica sobre el conjunto E. Si $\forall x, y \in E : d_1(x, y) = \text{mín} \{1, d(x, y)\}$, demuestre que d_1 es también una métrica sobre E.

3. Tomemos un número natural i entre 1 y n.
   Definamos para $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ en R^n,

   $$d(x, y) = |x_i - y_i|.$$

   ¿Qué propiedades de una métrica posee d?

4. Sea ρ un écart sobre un conjunto F. Para $x, y \in F$ definimos

   $$x \sim y \Longleftrightarrow \rho(x, y) = 0.$$

   a) Demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre F.
   b) Sean $x \sim y$, $z \sim \omega$. Compruébese que

   $$\rho(x, z) = \rho(y, \omega).$$

   (Verifique que el Lema 1 de 1.1 es válido para écarts y aplíquelo.)
   c) Sea $E = F/\sim$ (conjunto cociente respecto $\sim$).
   Para $\xi, \eta \in E$ cualesquiera, tomemos $x \in \xi$, $y \in \eta$, y definamos

   $$d(\xi, \eta) = \rho(x, y).$$

   Demuestre que d es una métrica sobre E.

5. Sean $d_1, d_2, \cdots, d_n$ métricas sobre un conjunto E.
Demostrar que $d = \sum_{i=1}^{n} d_i$ es una métrica para E.

$$(d \text{ se define como } d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x, y)).$$

6. Si d es una métrica sobre E, definimos para $x, y \in E$:

$$d^1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

Demuéstrese que d^1 es una métrica sobre E.

7. Sean (E_1, d_1), (E_2, d_2) espacios métricos.
Demostrar que para $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ en $E_1 \times E_2$,

$$d(x, y) = \text{máx}\,\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\},$$
$$d^1(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2),$$
$$d^{11}(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2},$$

definen métricas para $E_1 \times E_2$.

8. Sea $\{d_n\}$ una sucesión de métricas, todas ellas sobre el mismo conjunto

E y $d_n(x, y) \leq 1, \forall\, n \in N, \forall\, x, y \in E$.

Demostrar que $d = \sum_{n=0}^{\infty} d_n/2^n$ es una métrica sobre E.

9. Sea E el conjunto de todas las sucesiones reales $\{x_n\}$ acotadas ($|x_n| \leq k$, para algún $k > 0$).
Demostrar que $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup_n |x_n - y_n|$
define una métrica d sobre E.

10. Sea S el conjunto de todas las sucesiones reales.
Demostrar que $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$
define una métrica sobre S.

11. Sea $C[a, b]$ el conjunto de todas las funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y de valores reales.

Definimos:

$$d(f, g) = \int_a^b \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} dx$$

para $f, g \in C[a, b]$.
Demostrar que d es una métrica para $C[a, b]$.

12. Sean (E, d), (E^1, d^1) espacios métricos.
Supongamos que existe una función

$$f : E \to E^1$$

tal que

$$\forall x, y \in E : d(x, y) = d^1(f(x), f(y)).$$

Demostrar que (E, d) es isométrico con un subespacio de (E^1, d^1).

CAPITULO II

Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados

2.1. ESFERAS ABIERTAS, CERRADAS Y SUPERFICIE ESFERICA

Sea (E, d) un espacio métrico cualquiera. Definiremos ciertos subconjuntos importantes de E.

Tomemos un punto $a \in E$ y un número real $r > 0$. Se llama *esfera abierta* de centro a y radio r al conjunto:

$$N(a; r) = \{x \in E \mid d(x, a) < r\}.$$

Esfera abierta *reducida* de centro a y radio r es el conjunto:

$$N^1(a; r) = \{x \in E \mid 0 < d(x, a) < r\};$$

nótese que no es otra cosa que $N(a; r) - \{a\}$.

Esfera cerrada de centro a y radio r es el conjunto·

$$\overline{N}(a; r) = \{x \in E \mid d(x, a) \leq r\}.$$

Superficie esférica de centro a y radio r es el conjunto:

$$S(a; r) = \{x \in E \mid d(a, x) = r\}.$$

Obsérvese que tanto una esfera abierta como cerrada no puede ser un conjunto vacío, ya que al menos el centro pertenece a él. Una esfera abierta reducida o una superficie esférica puede, por otra parte, resultar un conjunto vacío.

Como consecuencia inmediata de las definiciones, se deduce:

$0 < r_1 \leq r_2$ implica que $N(a; r_1) \subset N(a; r_2)$, $\overline{N}(a; r_1) \subset \overline{N}(a; r_2)$. $N(a; r) \subset \overline{N}(a; r)$, $S(a; r) \subset \overline{N}(a; r)$, $N(a; r) \cap S(a; r) = \phi$, $\overline{N}(a; r) = N(a; r) \cup S(a; r)$, $N(a; r) = \overline{N}(a; r) - S(a; r)$.

En el espacio métrico la recta real (Ejemplo 2 de 1.1), una esfera abierta de centro a y radio $r > 0$ es el conjunto de números reales (puntos) x, tales que $|x-a| < r$, es decir, el intervalo abierto $(a-r, a+r)$; la esfera cerrada del mismo centro y radio resulta ser el intervalo cerrado $[a-r, a+r]$.

La superficie esférica es el conjunto constituido únicamente por el par de puntos $a-r, a+r$.

En el espacio métrico R^2 con su métrica definida en el Ejemplo 5 de 1.1, una esfera abierta de centro a y radio $r > 0$, representada geométricamente, no es más que un círculo de centro a y radio r, excluida la circunferencia. La esfera cerrada será el círculo completo y la superficie esférica sólo la circunferencia.

Efectuando una representación geométrica análoga en el caso del espacio métrico R^3, observamos que las esferas cerradas resultan ser esferas; las abiertas, esferas también, excluida la superficie, y las superficies esféricas coinciden con las geométricas del mismo nombre.

2.2. CONJUNTOS ABIERTOS

Sea (E, d) un espacio métrico cualquiera y A un subconjunto de E.

Se dice que $x \in A$ es un *punto interior* de A si existe un número real $r > 0$ tal que

$$N(x; r) \subset A.$$

Al conjunto

$$\mathring{A} = \{x \in A \mid x \text{ es interior de } A\}$$

se le llama *interior del conjunto A*.

En consecuencia de la definición tenemos que $\mathring{A} \subset A$.

$\mathring{A}$ puede muy bien ser vacío sin que lo sea A. Tal situación es de mucho interés y volveremos sobre ella más adelante.

Decimos que el conjunto A es *abierto* si $A = \mathring{A}$, es decir, si todo punto de A es interior.

El conjunto E es abierto trivialmente, lo mismo que el conjunto vacío ϕ (¿qué punto de ϕ no es interior?).

Teorema 1. Toda esfera abierta es un conjunto abierto.

DEMOSTRACIÓN. Sea la esfera abierta $N(a; r)$ y $x \in N(a; r)$ un punto cualquiera de ella. Nos proponemos demostrar que x es interior a la esfera.

Consideremos el número real

$$r_1 = r - d(a, x) > 0$$

y la esfera abierta $N(x; r_1)$. Demostremos que $N(x; r_1) \subset N(a; r)$.

$$\forall\, y \in N(x; r_1) : d(x, y) < r_1, \text{ es decir,}$$

$$d(x, y) < r - d(a, x),$$

o sea

$$d(x, y) + d(a, x) < r,$$

pero

$$d(a, y) \leq d(x, y) + d(a, x),$$

de donde

$$d(a, y) < r,$$

lo cual implica

$$y \in N(a; r).$$

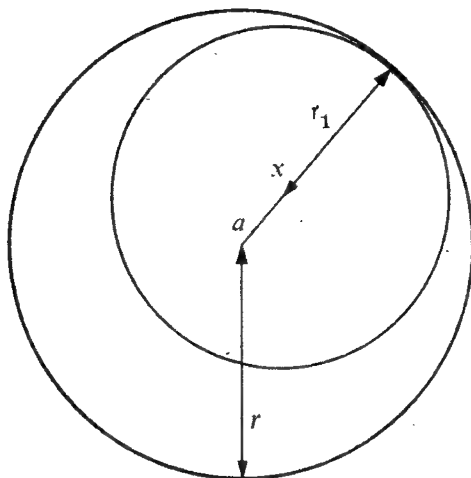


Figura 1. Ilustración en R^2 de la demostración del Teorema 1 de 2.2.

Sea $A \subset B$. Es inmediato que todo punto interior de A es interior de B, es decir,

$$\mathring{A} \subset \mathring{B}$$

Esto nos permite tomar interiores a ambos miembros de una inclusión, preservándose el sentido de ésta.

Teorema 2. Para todo conjunto A en (E, d), $\mathring{A}$ es un conjunto abierto, es decir $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.

DEMOSTRACIÓN. Si $\mathring{A} = \phi$, sabemos que es abierto. Supongamos que no es vacío y tomemos un $x \in \mathring{A}$; demostremos que x es interior a $\mathring{A}$.

$x \in \mathring{A}$ implica la existencia de un $r > 0$ tal que

$$N(x; r) \subset A;$$

pero en virtud del Teorema 1, $N(x; r)$ es un conjunto abierto, de manera que, tomando interiores a ambos miembros de la inclusión, obtenemos:

$$N(x; r) \subset \mathring{A};$$

o sea que x es punto interior de $\mathring{A}$ y éste es un conjunto abierto.

Supongamos ahora que $C \subset A$ y C es abierto.

Tomando interiores a ambos miembros de esta inclusión y teniendo en cuenta que C coincide con su interior, obtenemos:

$$C \subset \mathring{A}.$$

Este resultado lo podemos interpretar figurativamente diciendo que $\mathring{A}$ es el "máximo conjunto abierto contenido en A".

Obtengamos otra caracterización del interior de un conjunto cualquiera A: Sea la familia

$$F = \{B \subset A \mid B \text{ es abierto}\}.$$

(F no es vacía, ya que al menos $\phi \in F$).

Demostremos que

$$\mathring{A} = \bigcup_{B \in F} B.$$

En efecto,

$\forall\, B \in F : B \subset A$ y B es abierto, lo cual implica

$$B \subset \mathring{A},$$

de donde

$$\bigcup_{B \in F} B \subset \mathring{A}.$$

Recíprocamente, como $\mathring{A}$ es abierto y está contenido en A, entonces

$$\mathring{A} \in F; \text{ luego, } \mathring{A} \subset \bigcup_{B \in F} B.$$

En resumen, $\mathring{A}$ es la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A.

Los dos teoremas siguientes, no obstante sus muy sencillas demostraciones, son de extraordinaria trascendencia al permitirnos operar con abiertos en forma conjuntista.

Teorema 3. La unión en una familia cualquiera de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

DEMOSTRACIÓN. Sea F la familia de conjuntos abiertos y

$$S = \bigcup_{A \in F} A.$$

Demostremos que S es abierto.

Si $x \in S$, entonces $x \in A$ para algún $A \in F$; pero A es abierto, luego existe un número real $r > 0$ tal que

$$N(x; r) \subset A.$$

Por otra parte, $A \subset S$, lo cual implica $N(x; r) \subset S$, o sea que x es interior a S y S es por tanto abierto.

Teorema 4. La intersección de un número finito de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

DEMOSTRACIÓN. Sean los conjuntos abiertos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ y

$$T = \bigcap_{k=1}^{n} A_k.$$

Demostremos que T es abierto. Supongamos que $T \neq \phi$, ya que de lo contrario el teorema estaría demostrado.

Si $x \in T$, entonces $x \in A_k$ (para $k = 1, 2, \cdots, n$) y como A_k es abierto, existen números reales positivos $r_1, r_2, \cdots, r_n$ tales que

$$N(x; r_k) \subset A_k \quad (\text{para } k = 1, 2, \cdots, n).$$

Sea $r = \text{mín } \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$; luego, $r \leq r_k$, para cada k, lo cual implica $N(x; r) \subset N(x; r_k)$ para $k = 1, 2, 3, \cdots, n$.
Pero entonces

$$N(x; r) \subset A_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n),$$

de donde

$$N(x; r) \subset T.$$

El Teorema 3 nos indica que las uniones de abiertos siempre resultan ser conjuntos de abiertos. Por otra parte, el Teorema 4 nos dice lo mismo con respecto a intersecciones; pero con la restricción de que los intersecandos deben ser en número finito.

No puede garantizarse que la intersección de un número infinito de abiertos sea un abierto. Por ejemplo, en la recta real (Ejemplo 2 de 1.1) todo intervalo abierto es un conjunto abierto, observación que vale la pena destacar. En efecto, sea $a < b$ y consideremos el intervalo abierto (a, b). El lector comprobará:

$$(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\} = \left\{x \in R \mid \left|x - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{2}\right\};$$

pero el último conjunto de la derecha no es otra cosa que

$$N\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b-a}{2}\right),$$

y sabemos que toda esfera abierta es un abierto. Pero volvamos a nuestro ejemplo. Consideremos la familia de infinitos abiertos constituida por los intervalos $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ para todo n natural mayor que cero. La intersección en esa familia es el conjunto $\{0\}$ constituido por un solo punto, el cual no es abierto en R.

El teorema que sigue nos indica lo que sucede al tomar el interior de una unión y el de una intersección.

Teorema 5. Si A y B son conjuntos cualesquiera en un espacio métrico, entonces

$$\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}, \quad \mathring{A} \cap \mathring{B} = \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}.$$

Demostración. Tenemos que $\mathring{A} \subset A$ y $\mathring{B} \subset B$, de donde

$$\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset A \cup B \text{ y } \mathring{A} \cap \mathring{B} \subset A \cap B;$$

pero en virtud de los Teoremas 3 y 4, $\mathring{A} \cup \mathring{B}$ y $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ son abiertos, lo cual implica:

$$\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \text{ y } \mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \tag{1}$$

Por otra parte, $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$, de donde tomando interiores

$$\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \mathring{A} \text{ y } \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \mathring{B};$$

luego,

$$\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B},$$

y, considerando esta última inclusión junto con la (1), concluimos:

$$\mathring{A} \cap \mathring{B} = \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}.$$

Ambos resultados establecidos en el teorema precedente pueden, por supuesto, extenderse a un número finito de conjuntos por inducción.

$\mathring{A} \cup \mathring{B}$ pueden muy bien no coincidir con $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$. Por ejemplo, consideremos en la recta real los conjuntos

$$R^- = \{x \in R \mid x < 0\}, \; R^+ = \{x \in R \mid x \geq 0\};$$

es evidente que $R^- \cup R^+ = R$, el cual es abierto y coincide por tanto con su interior, es decir

$$\overset{\circ}{\widehat{R^- \cup R^+}} = R.$$

Por otra parte, se comprueba fácilmente que

$$\mathring{R}^- = R^- \text{ y } \mathring{R}^+ = \{x \in R \mid x > 0\},$$

de donde

$$\mathring{R}^- \cup \mathring{R}^+ = R - \{0\}.$$

2.3. ENTORNOS Y PUNTOS DE ACUMULACION

Sea (E, d) un espacio métrico cualquiera y $a \in E$.

Se llama *entorno del punto* a a todo conjunto abierto que lo contenga.

Así, en particular, una esfera abierta de centro a y cualquiera radio r es un entorno de a. Obsérvese, por otra parte, que todo entorno de a contiene una esfera abierta de centro a, ya que a pertenece al entorno y es, por tanto, punto interior de éste.

Un conjunto abierto es un entorno de cualquiera de sus puntos.

Es consecuencia de los Teoremas 3 y 4 de 2.2 que la unión en una familia cualquiera de entornos de un mismo punto es un entorno de ese punto; y que la intersección de un número finito de entornos de un mismo punto es también un entorno de éste.

El concepto de entorno está motivado por la idea intuitiva de cercanía o proximidad al punto en cuestión.

Esa noción y, por consiguiente, su definición precisa como entorno, constituye una de las ideas fundamentales sobre la cual se apoya el Análisis y la Topología. Conceptos como el de límite, continuidad, derivada y otros tienen allí su origen. No obstante la aparente sencillez de la definición de entorno, su importancia no puede exagerarse; es la síntesis extraordinaria de casi tres siglos de maduración y decantación realizadas por varias generaciones de matemáticos ilustres. La vaga noción del "infinitamente pequeño", de Newton y Leibnitz encuentra su expresión racional y precisa.

Siguiendo la corriente de estas ideas pasamos a formular el concepto crucial de punto de acumulación de un conjunto. Como su nombre lo indica, es un punto alrededor del cual se acumulan, se concentran, los puntos del conjunto, de forma tal que, por "pequeño" que sea el entorno, siempre los hallaremos en él.

A es un conjunto en el espacio métrico (E, d) y $x \in E$. Se dice que x es un *punto de acumulación del conjunto A*. Si *todo* entorno de x contiene puntos de A *distintos de x*. Es decir: Para todo entorno S de x se cumple

$$(S - \{x\}) \cap A \neq \phi.$$

(Al entorno S, desprovisto de x, suele llamarse entorno reducido.)

Puede muy bien suceder que el conjunto A no admita ningún punto de acumulación, así como admitir muchos.

Nótese que no se exige, en la definición, que $x \in A$, pero puede suceder.

Si $x \in A$, pero no es punto de acumulación de A, recibe el nombre de *punto aislado de A*. Esto quiere decir que existe algún entorno de x que no contiene puntos de A, aparte de él mismo.

Se comprueba fácilmente que en la recta real el conjunto

$$\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \cdots\}$$

posee un único punto de acumulación que es el cero, el cual no pertenece al conjunto. Todos los elementos del conjunto son aislados.

En el mismo espacio, todo $x \in R$ es punto de acumulación del conjunto Q de los números racionales.

Si A es un conjunto en (E, d) y $x \in E$ es tal que para todo número real $r > 0$:

$$A \cap N^1(x; r) \neq \phi,$$

entonces x es punto de acumulación de A. En efecto, sea S un entorno cualquiera de x. Como $x \in S$ y S es abierto, existe un $r > 0$ tal que

$$N(x; r) \subset S,$$

lo cual implica

$$N^1(x; r) \subset S - \{x\},$$

de donde

$$\phi \neq A \cap N^1(x; r) \subset (S - \{x\}) \cap A$$

El recíproco de este resultado es, por supuesto, cierto, ya que una esfera abierta de centro x es un entorno de x.

Al conjunto de todos los puntos de acumulación de un conjunto A se llama *conjunto derivado de A* y se designa por A'.

En general, A' puede contener desde ninguno hasta infinitos puntos y su relación con A puede ser cualquiera: coincidir con él, contenerlo, estar contenido en él, ser disjunto o ninguna de estas cosas. Algunos de estos casos dan origen a diversos tipos de conjuntos de gran importancia, como veremos más adelante.

El teorema que sigue es bastante evidente desde un punto de vista intuitivo.

Teorema 1. Sea x un punto de acumulación de un conjunto A. Si S es un entorno cualquiera de x, el conjunto

$$(S-\{x\}) \cap A$$

contiene infinitos puntos.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, al contrario, que

$$(S-\{x\}) \cap A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}.$$

Designemos por

$$r_k = d(x, x_k) > 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

Por otra parte, como S es abierto y contiene a x, existe un $r_0 > 0$ tal que

$$N(x; r_0) \subset S.$$

Sea ahora

$$r = \text{mín}\,\{r_0, r_1, r_2, \cdots, r_n\}.$$

Entonces

$$N^1(x; r) \cap A = \phi,$$

ya que

$$N^1(x; r) \subset S-\{x\}$$

y no contiene ninguno de los x_k. Pero esto contradice la hipótesis de que x es punto de acumulación de A.

De este teorema se deduce que para que un conjunto tenga la posibilidad de admitir puntos de acumulación debe ser infinito; dicho de otra manera, si un conjunto admite algún punto de acumulación, es infinito. Expresado una vez más en forma equivalente, un conjunto finito no admite puntos de acumulación.

Recíprocamente, si un conjunto es infinito no puede asegurarse que admita puntos de acumulación. Por ejemplo, el conjunto N de los números naturales es infinito pero no admite puntos de acumulación en R. No obstante, en R^n o, más general, en todo espacio normado de dimensión finita, conjuntos infinitos que satisfagan una débil hipótesis adicional (acotados) sí admiten puntos de acumulación. Este es el famoso teorema de Bolzano-Weierstrass que se verá más adelante; desgraciadamente, no es válido en un espacio métrico cualquiera.

Por último, volviendo a un espacio métrico general (E, d), consideremos en él los conjuntos

$$A \subset B.$$

Es evidente, teniendo en cuenta la definición, que todo punto de acumulación de A lo es también de B, es decir,

$$A' \subset B'.$$

Este sencillo resultado nos permite tomar derivados a ambos miembros de una inclusión, preservándose el sentido de ésta.

2.4. CONJUNTOS CERRADOS

Sea (E, d) un espacio métrico cualquiera y A un subconjunto de E. Si

$$A' \subset A,$$

es decir, si A contiene todos sus puntos de acumulación, decimos que A es *un conjunto cerrado.*

Si A no admite puntos de acumulación, es decir $A' = \phi$, A es cerrado, ya que siempre $A' \subset A$. En particular, el conjunto vacío ϕ y cualquier conjunto constituido por un número infinito de puntos son conjuntos cerrados.

El conjunto E es también cerrado trivialmente.

Nótese pues que tanto ϕ como E son conjuntos abiertos y cerrados a la vez. Resulta oportuno llamar la atención del lector sobre el hecho de que conjunto cerrado no se ha definido como aquel que no es abierto, ni viceversa. Esto admite la posibilidad de que algún conjunto sea abierto y cerrado, que sea una de las dos cosas o, como es el caso más frecuente, ni una ni otra. La existencia de conjuntos abiertos y cerrados a la vez es particularmente interesante y será estudiada a fondo cuando tratemos conjuntos conexos.

Puede suceder que $A' = A$, es decir, que A sea cerrado y que todos sus puntos sean de acumulación. Un conjunto con esa propiedad se dice que es *perfecto*. Poseen propiedades interesantes, pero son poco frecuentes. Un ejemplo clásico de conjunto perfecto es un intervalo cerrado (de más de un punto) en la recta real (verifíquese), así como también todo el conjunto R.

Dado el conjunto A en un espacio métrico (E, d), al conjunto

$$\bar{A} = A \cup A'$$

o sea la unión de A con todos sus puntos de acumulación, se le llama *clausura de A* y sus elementos reciben el nombre de *puntos de adherencia de A.*

En seguida se observa que

$$A' \subset A \Longleftrightarrow \bar{A} = A \cup A' = A.$$

es decir, un conjunto es cerrado si, y sólo si, coincide con su clausura.
En general tendremos que

$$A \subset \bar{A} \text{ y } A' \subset \bar{A},$$

en virtud de la definición de $\bar{A}$.
Supongamos que se tiene

$$A \subset B,$$

sabemos que implica $A' \subset B'$; pero entonces, de $A \subset B$ y $A' \subset B'$ obtenemos:

$$\bar{A} \subset \bar{B}.$$

Este resultado nos permite "clausurar" ambos miembros de una inclusión, preservándose su sentido. Puede darse el caso, no obstante, de que una inclusión propia se convierta en igualdad al clausurar. Por ejemplo,

$$(a, b) \subset [a, b]$$

en la recta real.

Teorema 1. Para todo conjunto A en un espacio métrico se verifica:

$$(\bar{A})' \doteq A'.$$

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que $A \subset \bar{A}$, y como al tomar derivados se preserva el sentido de la inclusión:

$$A' \subset (\bar{A})'. \tag{1}$$

Podemos suponer que $(\bar{A})' \neq \phi$, ya que de lo contrario, la tesis del teorema sería cierta trivialmente. Tomemos entonces un $x \in (\bar{A})'$ cualquiera y veamos que $x \in A'$. En efecto, sea S un entorno de x. S contiene infinitos puntos de $\bar{A}$ (Teorema 1 de 2.3), es decir, infinitos puntos de $A \cup A'$, y por cada

$$y \in S \cap A',$$

S es también un entorno de y, pero $y \in A'$, de manera que S contiene infinitos puntos de A'.

En resumen, S contiene infinitos puntos de A en todo caso, lo cual implica que $x \in A'$.

Hemos demostrado que

$$(\bar{A})' \subset A',$$

que tomado junto con (1) demuestra el teorema.

Corolario 1'. Para todo conjunto A en un espacio métrico,

$$A' \text{ y } \bar{A} \text{ son conjuntos cerrados.}$$

Demostración. Aplicando el teorema tenemos:

$$(\bar{A})' = A' \subset \bar{A},$$

o sea que $\bar{A}$ es cerrado.

Tomando derivados a ambos miembros de la inclusión

$$A' \subset \bar{A}$$

y aplicando de nuevo el teorema:

$$(A')' \subset (\bar{A})' = A'$$

indicando que A' es cerrado.

Supongamos que $A \subset B$ y B es un conjunto cerrado. Clausurando ambos miembros de esta inclusión y teniendo en cuenta que B coincide con su clausura, obtenemos:

$$\bar{A} \subset B.$$

Esto lo podemos interpretar figurativamente diciendo que "el mínimo conjunto cerrado que contiene a A es su clausura".

Podemos obtener otra caracterización interesante de la clausura: Sea la familia

$$F = \{A \subset B \mid B \text{ es cerrado}\},$$

(F no es vacía, ya que al menos $E \in F$).

Demostremos que

$$\bar{A} = \bigcap_{B \in F} B.$$

En efecto,

$$\forall\, B \in F : A \subset B \text{ y } B \text{ es cerrado, lo cual implica}$$
$$\bar{A} \subset B,$$

de donde

$$\bar{A} \subset \bigcap_{B \in F} B,$$

Por otra parte, $\bar{A}$ es cerrado y $A \subset \bar{A}$, luego $\bar{A} \in F$, entonces

$$\bigcap_{B \in F} B \subset \bar{A}.$$

En resumen, $\bar{A}$ es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A.

A los elementos de $\bar{A}$ los hemos llamado puntos de adherencia de A. El siguiente teorema nos proporciona dos útiles caracterizaciones de ellos.

Teorema 2. Para un conjunto A, de clausura no vacía, las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) $x \in \bar{A}$,
b) $d(x, A) = 0$,
c) Para todo entorno S de $x : S \cap A \neq \phi$.

DEMOSTRACIÓN $(a \Longrightarrow b)$. Sea pues $x \in \bar{A} = A \cup A'$. Si $x \in A$ es evidente que $d(x, A) = 0$. Supongamos que $x \in A'$ y tomemos un número real cualquiera $\varepsilon > 0$. Como $N(x; \varepsilon)$ es un entorno de x, por definición de punto de acumulación se verifica

$$A \cap N^1(x; \varepsilon) \neq \phi,$$

es decir, existe algún $y \in A$ con $d(x, y) < \varepsilon$. O sea que $\varepsilon > 0$ no es cota inferior del conjunto $\{d(x, y)\}_{y \in A}$. Necesariamente $d(x, A) = 0$.

$(b \Longrightarrow c)$. Tenemos que $d(x, A) = 0$. Sea S un entorno cualquiera de x. Como S es abierto y contiene a x, existe un número real $r > 0$ tal que

$$N(x; r) \subset S.$$

Pero $r > 0 = d(x, A)$, luego r no es cota inferior del conjunto $\{d(x, y)\}_{y \in A}$, lo cual implica que $d(x, y) < r$, para algún $y \in A$. Es decir, existe algún $y \in A$ tal que $y \in N(x; r)$. O sea que

$$\phi \neq A \cap N(x;r) \subset S \cap A$$

$(c \Longrightarrow a)$ $S \cap A \neq \phi$ para todo entorno S de x.

Si $x \in A$, entonces $x \in \bar{A}$. En caso de que $x \notin A$, la hipótesis implica que x es punto de acumulación de A, es decir $x \in A'$, y también en este caso $x \in \bar{A}$.

No debe confundirse la proposición (c) del teorema con la definición de punto de acumulación. La diferencia esencial radica en que no se toma el entorno reducido para intercectarlo con A. Nótese que un punto aislado de A es también punto de adherencia.

El siguiente teorema establece una importantísima relación entre conjuntos abiertos y cerrados: Si A es abierto (cerrado) su complemento es cerrado (abierto). Puede verse como una caracterización de cerrados en términos de abiertos, que muy bien ha podido tomarse como definición de cerrado, tal como se hace en topología general.

Teorema 3. Un conjunto A en un espacio métrico (E, d) es cerrado si, y sólo si $E-A$ es abierto.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que A es cerrado y demostremos que $E-A$ es abierto. Si $E-A$ es vacío, sabemos que es abierto; consideremos pues que $E-A \neq \phi$ y tomemos un $x \in E-A$. Como A contiene todos sus puntos de acumulación por ser cerrado, y $x \notin A$, x no es punto de acumulación de A. Debe entonces existir algún $r > 0$ tal que

$$A \cap N(x;r) = \phi,$$

lo cual implica que $N(x;r) \subset E-A$, o sea que x es punto interior de $E-A$ y éste es abierto.

Recíprocamente, supongamos que $E-A$ es abierto y demostremos que A es cerrado. Si $E-A$ es vacío resulta que $A = E$, que sabemos es cerrado. Consideremos pues $E-A \neq \phi$ y tomemos un $x \in E-A$. Existe un $r > 0$ tal que $N(x;r) \subset E-A$, lo cual implica que $A \cap N(x;r) = \phi$. Esto quiere decir que si un punto no pertenece a A, entonces no es de acumulación de A, o sea que A debe contener todos sus puntos de acumulación (aunque no existan) y es cerrado.

Corolario 3'. A es abierto si y sólo si $E-A$ es cerrado.

DEMOSTRACIÓN. Si A es abierto, como $A = E-(E-A)$, entonces $E-A$ es cerrado en virtud del teorema.

Recíprocamente, si $E-A$ es cerrado, el teorema nos dice que

$$E-(E-A) = A \text{ es abierto.}$$

El teorema siguiente nos indica qué sucede cuando se unen o se intersectan conjuntos cerrados. Compárese con los teoremas 3 y 4 de 2.2.

Teorema 4.

1) La unión de número finito de cerrados es un conjunto cerrado.
2) La intersección en una familia cualquiera de cerrados es un conjunto cerrado.

DEMOSTRACIÓN.

1) Sean los conjuntos cerrados $A_1, A_2, \cdots, A_n$ y designemos por

$$S = \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Demostremos que S es cerrado. Haciendo uso de las fórmulas de De Morgan podemos escribir

$$E-S = \bigcap_{k=1}^{n} (E-A_k);$$

pero $E-A_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ es abierto por ser A_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ cerrado (Teorema 3), lo cual implica, en virtud del Teorema 4 de 2.2, que la intersección de todos ellos, es decir $E-S$, es conjunto abierto.

El teorema 3 nos dice que S es cerrado.

2) Sea F una familia de conjuntos cerrados y designemos por

$$T = \bigcap_{A \in F} A.$$

Demostremos que T es cerrado. Aplicando de nuevo las fórmulas de De Morgan, expresamos:

$$E-T = \bigcup_{A \in F} (E-A).$$

Pero los $E-A$, $\forall A \in F$, constituyen una familia de conjuntos abiertos (Teorema 3), lo cual implica, por el Teorema 3 de 2.2, que la unión de todos ellos, es decir $E-T$, es un conjunto abierto. Una vez más el Teorema 3 nos indica que T es cerrado.

Corolario 4'. Sean los conjuntos A y B en el espacio métrico (E, d). Se verifica:

$$A \text{ abierto y } B \text{ cerrado} \Longrightarrow A-B \text{ abierto},$$
$$A \text{ cerrado y } B \text{ abierto} \Longrightarrow A-B \text{ cerrado}.$$

DEMOSTRACIÓN. $A-B = (E-B) \cap A$.

Veamos que una esfera cerrada, al igual que la abierta, no contradice su nombre.

Teorema 5. Toda esfera cerrada, así como toda superficie esférica, es un conjunto cerrado.

DEMOSTRACIÓN. Sea la esfera cerrada $\bar{N}(a; r)$ en un espacio métrico (E, d) y demostremos que el conjunto

$$E-\bar{N}(a; r)$$

es abierto.

Tomemos un $x \in E-\bar{N}(a; r)$, lo cual es equivalente a que

$$d(a, x) > r.$$

Sea $r_1 = d(a, x) - r > 0$ y veamos que

$$N(x; r_1) \subset E-\bar{N}(a; r).$$

En efecto, si

$$y \in N(x; r_1),$$

entonces

$$d(x, y) < r_1,$$

es decir,

$$d(x, y) < d(a, x) - r. \qquad (1)$$

Por otra parte,

$$d(a, x) \leq d(a, y) + d(x, y). \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2):

$$d(a, y) > r,$$

lo que equivale a

$$y \notin \bar{N}(a; r),$$

es decir

$$y \in E - \bar{N}(a; r).$$

Tenemos pues que x es punto interior de $E - \bar{N}(a; r)$ y éste es abierto. En virtud del Teorema 3, $\bar{N}(a; r)$ es cerrado.

Para demostrar que la superficie esférica $S(a; r)$ es un conjunto cerrado, basta con aplicar el Corolario 4′, sabiendo que

$$S(a; r) = \bar{N}(a; r) - N(a; r).$$

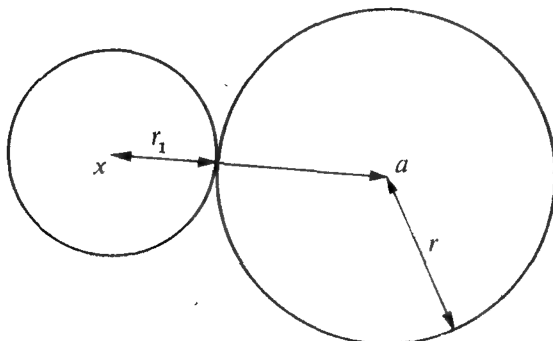


Figura 2. Ilustración en R^2 de la demostración del Teorema 5.

En un espacio métrico (E, d) consideremos una esfera abierta $N(a; r)$ y la cerrada del mismo centro y radio $\bar{N}(a; r)$. Sabemos que

$$N(a; r) \subset \bar{N}(a; r).$$

Clausurando ambos miembros de esa inclusión y teniendo en cuenta que la clausura de la esfera cerrada coincide con ésta por ser cerrada, obtenemos:

$$\overline{N(a; r)} \subset \bar{N}(a; r).$$

Conviene destacar que, en general, esa inclusión es propia; es decir, la clausura de la esfera abierta no es necesariamente igual a la esfera cerrada de mismo centro y radio. Por ejemplo, sea (E, d) un espacio métrico discreto (Ejemplo 1 de 1.1) de más de un punto y tomemos $x \in E$. Tenemos que

$$N(x; 1) = \{x\},$$

de donde

$$\overline{N(x; 1)} = \{x\},$$

en cambio

$$\bar{N}(x; 1) = E.$$

No obstante, en muchos espacios particulares la clausura de la esfera abierta sí coincide con la cerrada. Demuestre el lector que esto sucede siempre en R^n.

El siguiente resultado nos indica lo que sucede al clausurar una unión y una intersección. Compárese con el Teorema 5 de 2.2.

Teorema 6. Si A y B son conjuntos cualesquiera en un espacio métrico, entonces

$$\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$A \subset \bar{A} \text{ y } B \subset \bar{B}$$

implican

$$A \cap B \subset \bar{A} \cap \bar{B} \text{ y } A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B};$$

pero teniendo en cuenta que las clausuras son conjuntos cerrados (Corolario 1′) y el Teorema 4, los conjuntos $\bar{A} \cap \bar{B}$ y $\bar{A} \cup \bar{B}$ son cerrados; de manera que, clausurando ambos miembros de las inclusiones anteriores, obtenemos:

$$\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B} \qquad (1)$$

Por otra parte, clausurando en

$$A \subset A \cup B \text{ y } B \subset A \cup B,$$

resulta

$$\bar{A} \subset \overline{A \cup B} \text{ y } \bar{B} \subset \overline{A \cup B},$$

de donde

$$\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B},$$

que, junto con (1) implica

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

La clausura de la intersección no es igual, en general, a la intersección de las clausuras. Por ejemplo, en la recta real consideremos los intervalos abiertos $A = (a,b)$, $B = (b,c)$, para $a < b < c$. Se comprueba con facilidad que

$$\overline{A\cap B} = \phi \text{ y } \bar{A}\cap\bar{B} = \{b\}.$$

Ambas relaciones establecidas en el Teorema 6 pueden extenderse, aplicando el principio de inducción, a cualquier número finito de conjuntos.

Son muy útiles los resultados que establece el próximo teorema, además de relacionar, en forma interesante, al interior y la clausura.

Teorema 7. Para todo conjunto A de un espacio métrico cualquiera (E,d) se verifica:

$$\overline{E-A} = E-\mathring{A}, \quad E-\bar{A} = \overset{\circ}{\widehat{E-A}}.$$

Demostración. Tomando complementos a ambos miembros de las inclusiones

$$\mathring{A}\subset A, \quad A\subset\bar{A}$$

sus sentidos se invierten y obtenemos

$$E-A\subset E-\mathring{A}, \quad E-\bar{A}\subset E-A;$$

pero $E-\mathring{A}$ es cerrado (Corolario 3′) y $E-\bar{A}$ es abierto (Teorema 3), de manera que, tomando interiores en la segunda inclusión y clausurando la primera, resulta;

$$\overline{E-A}\subset E-\mathring{A}, \quad E-\bar{A}\subset\overset{\circ}{\widehat{E-A}}. \qquad (1)$$

Por otra parte, tenemos

$$E-A\subset\overline{E-A}, \quad \overset{\circ}{\widehat{E-A}}\subset E-A,$$

y tomando complemento en ambas,

$$E-(\overline{E-A})\subset A, \quad A\subset E-(\overset{\circ}{\widehat{E-A}});$$

pero $E-(\overline{E-A})$ es abierto y $E-(\overset{\circ}{\widehat{E-A}})$ es cerrado, o sea que si tomamos interiores en la primera inclusión y clausuramos la segunda, obtenemos

$$E-(\overline{E-A})\subset\mathring{A},\quad \mathring{A}\subset E-(\overset{\circ}{\widehat{E-A}}),$$

y complementando de nuevo

$$E-\mathring{A}\subset\overline{E-A},\quad \overset{\circ}{\widehat{E-A}}\subset E-\bar{A},$$

las cuales, junto con (1), concluyen la demostración.

2.5. FRONTERA Y BORDE

Procedemos a definir un concepto de gran utilidad y que facilita notablemente la visión intuitiva de muchas situaciones.

Sea A un conjunto cualquiera en un espacio métrico (E,d). Llamamos *frontera* de A al conjunto

$$\beta(A)=\bar{A}\cap(\overline{E-A}).$$

Antes de aventurar interpretaciones intuitivas sobre esta nueva noción, conviene listar un conjunto de propiedades de la frontera que se derivan de manera más o menos inmediata de la definición.

F_1) $\beta(A)$ es un conjunto cerrado. (Consecuencia del Corolario 1′ y los Teoremas 4 y 3 de 2.4.)

F_2) $\beta(A)=\beta(E-A)$.

F_3) Si $\beta(A)\neq\phi$, las tres propiedades siguientes son equivalentes (Teorema 2 de 2.4):

a) $x\in\beta(A)$,
b) $d(x,A)=d(x,E-A)=0$,
c) $S\cap A\neq\phi$, $S\cap(E-A)\neq\phi$, para todo entorno S de x

F_4) $\beta(A)=\bar{A}-\mathring{A}$. Aplicando el Teorema 7 de 2.4:

$$\bar{A}\cap(\overline{E-A})=\bar{A}\cap(E-\mathring{A})=\bar{A}-\mathring{A}$$

F_5) $\bar{A}=A\cup\beta(A)$. En efecto, $A\subset\bar{A}$ y $\beta(A)\subset\bar{A}$ implican $A\cup\beta(A)\subset\bar{A}$. Por otra parte, por F_4:

$$\bar{A}=\mathring{A}\cup(\bar{A}-\mathring{A})=\mathring{A}\cup\beta(A)\subset A\cup\beta(A).$$

F_6) A cerrado $\Longleftrightarrow \beta(A) \subset A$. $\beta(A) \subset \bar{A}$ como consecuencia de la definición de frontera, luego, si A es cerrado, entonces $A = \bar{A}$. Recíprocamente si $\beta(A) \subset A$, entonces, por F_5: $\bar{A} = A \cup \beta(A) = A$.

F_7) A abierto $\Longleftrightarrow A \cap \beta(A) = \phi$. Si A es abierto, entonces $A = \mathring{A}$, lo cual implica, por F_4, $A \cap \beta(A) = A \cap (\bar{A} - \mathring{A}) = \phi$.

Recíprocamente, si $A \cap \beta(A) = \phi$, entonces $A \cap (\bar{A} - \mathring{A}) = \phi$, lo cual implica $A \subset \mathring{A}$, es decir $A = \mathring{A}$ y A es abierto.

La frontera de un conjunto no vacío puede muy bien resultar vacía. Por ejemplo, sea (E, d) un espacio métrico discreto (Ejemplo 1 de 1.1) y tomemos $x \in E$. Se comprueba fácilmente que el conjunto $\{x\}$ y su complemento son cerrados, lo cual implica

$$\overline{\{x\}} = \{x\}, \quad \overline{E - \{x\}} = E - \{x\},$$

de donde $\beta(\{x\}) = \phi$. Este mismo espacio descarta la posibilidad de que la superficie esférica sea siempre la frontera de la abierta y la cerrada del mismo centro y radio. En efecto, $N(x; 1) = \{x\}$, cuya frontera es vacía, como hemos visto. Sin embargo, $S(x; 1) = E - \{x\}$.

La existencia de conjuntos de frontera vacía quedará dilucidada más adelante, cuando tratemos conectividad.

Nótese que, en cualquier espacio métrico (E, d):

$$\beta(\phi) = \phi, \quad \beta(E) = \phi.$$

También puede suceder que la frontera de un subconjunto propio del espacio sea todo el espacio. Por ejemplo, si Q es el conjunto de los números racionales en la recta real $\beta(Q) = R$.

A pesar de estos ejemplos patológicos, nos atrevemos a dar algunas interpretaciones intuitivas, con la poca confiabilidad que ellas merecen; pero contando con la benevolencia del lector.

Podemos pensar que cualquier conjunto de un espacio métrico esta limitado (de su complemento) por una concha o cáscara que es su frontera. Lo que se encuentra dentro de la cáscara es el interior del conjunto (F_4); y el conjunto con toda la cáscara es la clausura (F_5). Si el conjunto no incluye nada de la frontera es abierto (F_7), y si la incluye toda es cerrado (F_6). En caso de incluir sólo una parte de la concha, el conjunto no es abierto ni cerrado.

Debemos insistir en que tales interpretaciones son excesivamente simplistas. El concepto de espacio métrico es de una extraordinaria generalidad e incluye una abrumadora variedad de espacios, algunos de los cuales son muy extraños, sucediendo en ellos cosas que desconciertan nuestra modesta

intuición que no pasa de R^3. Por otra parte, aun en R^2 y hasta en la recta, pueden considerarse conjuntos tan complejos que desafían nuestro sentido común.

Debe, pues, el lector tomar las interpretaciones intuitivas en esta teoría abstracta con toda la desconfianza que merecen y a guisa de mera orientación.

Llamaremos *borde* de un conjunto A en un espacio métrico (E, d), a la parte de su frontera que le pertenece, es decir, al conjunto

$$b(A) = A \cap \beta(A).$$

Obtenemos de inmediato las siguientes propiedades:

B_1) A cerrado $\Longleftrightarrow$ $b(A) = \beta(A)$. (F_6),
B_2) A abierto $\Longleftrightarrow$ $b(A) = \phi$. (F_7),
B_3) $b(A) = A - \mathring{A}$. Aplicando F_4:
$A \cap \beta(A) = A \cap (\bar{A} - \mathring{A}) = A \cap \bar{A} \cap (E - \mathring{A}) = A \cap (E - \mathring{A}) = A - \mathring{A}$.
B_4) $b(E - A) = \beta(A) - b(A)$. (Se deja como ejercicio.)

2.6. ABIERTOS Y CERRADOS EN UN SUBESPACIO

Sea (E, d) un espacio métrico y F un subconjunto no vacío de E. Por 1.4 sabemos que F da origen a un espacio métrico (F, d) con respecto a la métrica inducida por d.

Nos proponemos averiguar cómo son los conjuntos abiertos y cerrados en el subespacio (F, d) y qué relación guardan con los abiertos y cerrados en (E, d).

Antes que nada, conviene precisar cómo son las esferas abiertas en (F, d), punto de partida para todo. Tomemos un $a \in F$ y un número real $r > 0$. De acuerdo a la definición dada en 2.1, una esfera abierta de centro a y radio r en (F, d) es el conjunto

$$\{x \in F \mid d(a, x) < r\};$$

pero esto no es otra cosa que $F \cap N(a; r)$, donde $N(a; r)$ es la esfera abierta de centro a y radio r en (E, d). Resulta, pues, que las esferas abiertas en (F, d) no son más que las intersecciones de las esferas abiertas en (E, d) con F.

Teorema 1. Un conjunto $B \subset F$ es abierto en el subespacio (F, d) de (E, d) si y sólo si existe un conjunto A abierto en (E, d), tal que

$$B = A \cap F.$$

Demostración. Supongamos que A es abierto en (E, d) y $B = A \cap F$. Si $B = \phi$, es abierto en (F, d). Consideremos que $B \neq \phi$ y tomemos un $x \in B$. Pero entonces $x \in A$ y A es abierto en (E, d), luego existe un $r > 0$ tal que

$$N(x; r) \subset A,$$

pero esto implica

$$F \cap N(x; r) \subset A \cap F = B.$$

Es decir, existe una esfera abierta de centro x en (F, d) contenida en B y éste es abierto en (F, d).

Recíprocamente, supongamos que B es abierto en (F, d). Luego, para cada $x \in B$, existe un número real $r_x > 0$ tal que

$$F \cap N(x; r_x) \subset B.$$

Pero esto implica que

$$B = \bigcup_{x \in B} [F \cap N(x; r_x)].$$

Por otra parte, empleando la propiedad distributiva de la intersección con respecto a la unión, tenemos:

$$\bigcup_{x \in B} [F \cap N(x; r_x)] = F \cap [\bigcup_{x \in B} N(x; r_x)].$$

Pero el conjunto $A = \bigcup_{x \in B} N(x; r_x)$ es abierto en (E, d), en virtud del Teorema 3 de 2.2, siendo

$$B = F \cap A.$$

De manera, pues, que los abiertos en (F, d) no son otros que las trazas de los abiertos en (E, d) con F.

Pasemos a averiguar cómo son los cerrados en (F, d). Antes recordaremos la definición de cerrado en cualquier espacio métrico. El conjunto es cerrado si contiene todos aquellos puntos del espacio que son sus puntos de acumulación. Particularizando, decimos que el conjunto $B \subset F$ es cerrado en (F, d) si todo punto de F, que sea de acumulación de B, pertenece a B.

Dicho de manera equivalente, B es cerrado en F si todo punto de acumulación de B que esté en F, pertenece a B. Nótese que esto no excluye la posibilidad de que existan en E puntos de acumulación de B que no pertenezcan a B ni a F. Por ejemplo, sean $a < c < b$ en la recta real y $F = (a, b)$, $B = (a, c]$. Es sencillo verificar que B es cerrado en F, y sin embargo, no contiene a su punto de acumulación a, el cual, por supuesto, no pertenece a F.

Cabe destacar que F es siempre abierto y cerrado en (F, d); aunque no sea ninguno de los dos en (E, d).

Teorema 2. Un conjunto $B \subset F$ es cerrado en el subespacio (F, d) de (E, d) si y sólo si existe un conjunto C cerrado en (E, d), tal que

$$B = C \cap F.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que C es cerrado en (E, d) y que $B = C \cap F$. Entonces $B \subset C$, y tomando derivados a ambos miembros $B' \subset C'$, pero C es cerrado, o sea, $C' \subset C$, de donde $B' \subset C$,

luego

$$F \cap B' \subset C \cap F = B.$$

Pero $F \cap B'$ es precisamente el conjunto de puntos de acumulación de B que están en F.

Recíprocamente, supongamos que B es cerrado en (F, d). Esto quiere decir que

$$B' \cap F \subset B \tag{1}$$

Nótese, además, que

$$B \cap F = B, \tag{2}$$

ya que $B \subset F$.

Ahora bien, el conjunto $\overline{B}$ es cerrado en (E, d), y teniendo en cuenta (1) y (2), podemos escribir:

$$\overline{B} \cap F = (B \cup B') \cap F = (B \cap F) \cup (B' \cap F) = B \cup (B' \cap F) = B.$$

Supongamos que F es abierto en (E, d); luego todo conjunto B abierto en (F, d) es tal que $B = A \cap F$, siendo A abierto en (E, d), de acuerdo al Teorema 1; pero esto implica que B es abierto en (E, d) (Teorema 4 de 2.2).

Recíprocamente, si todo conjunto abierto en (F, d) es abierto en (E, d), entonces F, que es abierto en (F, d), será abierto en (E, d).

En resumen: Es condición necesaria y suficiente para que todo conjunto abierto en (F, d) lo sea también en (E, d), que F sea un conjunto abierto en (E, d).

Esta conclusión, así como el razonamiento que la precede, es válida, palabra por palabra, cambiando abierto por cerrado.

2.7. CONJUNTOS DENSOS, FRONTERIZOS Y NADA-DENSOS

Se dice que un conjunto A es un espacio métrico (E, d) es *denso* si

$$\bar{A} = E.$$

El conjunto E es denso trivialmente; es, por cierto, el único conjunto cerrado y denso, ya que si A fuese denso y cerrado, entonces $A = \bar{A} = E$. Pero existen subconjuntos propios que son densos; por ejemplo, el conjunto Q de los racionales en la recta real es denso y constituye el ejemplo clásico. Asimismo, el conjunto de los irracionales es también denso en R.

Como aplicación directa del Teorema 2 de 2.4, podemos afirmar que las tres proposiciones siguientes son equivalentes:

1. A es denso.
2. $\forall x \in E: d(x, A) = 0$.
3. $S \cap A \neq \phi$, para todo conjunto abierto y no vacío S. Consecuencia de la simple observación de que todo punto del espacio es de adherencia de A.

El lema siguiente proporciona ejemplos generales de conjuntos densos en cualquier espacio métrico y además nos será útil más adelante.

Lema 1. Si A es un conjunto cualquiera en (E, d),

$$(E - \bar{A}) \cup A, \quad (E - A) \cup \mathring{A}$$

son densos.

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el Teorema 6 de 2.4:

$$E = (E - \bar{A}) \cup \bar{A} \subset (\overline{E - \bar{A}}) \cup \bar{A} = (\overline{E - \bar{A}) \cup A}.$$

Aplicando los Teoremas 7 y 6 de 2.4:

$$E = (E - \mathring{A}) \cup \mathring{A} = (\overline{E - A}) \cup \mathring{A} \subset (\overline{E - A}) \cup \bar{\mathring{A}} =$$
$$= (\overline{E - A}) \cup \mathring{A}}.$$

Decimos que el conjunto A del espacio métrico (E, d) es *fronterizo,* si su complemento $E-A$ es denso.

Decimos que A es *nada-denso,* si el complemento de su clausura $E-\bar{A}$ es denso.

Intuitivamente, podemos imaginarnos los fronterizos y nada-densos como los conjuntos "más flacos" del espacio, aquellos que "carecen de espesor", las "láminas" y "alambres". Veremos en seguida que se caracterizan por tener un interior vacío. En contraste, los conjuntos abiertos pueden verse como los genuinamente "gordos": cada uno de sus puntos es centro de una esfera abierta que queda enteramente dentro del conjunto

Procedemos a listar algunas propiedades de conjuntos fronterizos y nada-densos en un espacio cualquiera (E, d) que se derivan inmediatamente de sus definiciones:

P_1) ϕ es fronterizo y nada-denso.
P_2) E no es fronterizo ni nada-denso.
P_3) A es nada-denso $\Longleftrightarrow$ $\bar{A}$ es fronterizo.
P_4) A es cerrado y fronterizo $\Longrightarrow$ A es nada-denso.
P_5) A es nada-denso $\Longrightarrow$ A es fronterizo.

En efecto: $A \subset \bar{A}$ implica $E-\bar{A} \subset E-A$, de donde

$$E = \overline{E-\bar{A}} \subset \overline{E-A}, \quad \text{o sea} \quad \overline{E-A} = E.$$

P_6) A es fronterizo $\Longleftrightarrow$ $\mathring{A} = \phi$.

En efecto: aplicando el Teorema 7 de 2.4, A fronterizo equivale a

$$E = \overline{E-A} = E-\mathring{A},$$

lo cual es equivalente a que $\mathring{A} = \phi$.

P_7) A es abierto y fronterizo $\Longrightarrow$ $A = \phi$.

Ya que, por P_6, $\mathring{A} = \phi$, pero $A = \mathring{A}$ por ser abierto.

P_8) A es nada-denso $\Longrightarrow$ $\mathring{\bar{A}} = \phi$.

Consecuencia directa de P_3 y P_6.

P_9) Si $A \subset B$ y B es fronterizo o nada-denso, entonces A es fronterizo o nada-denso respectivamente.

En efecto:

$$A \subset B \Longrightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B} \text{ y } \mathring{\bar{A}} \subset \mathring{\bar{B}}.$$

A pesar del nombre, la frontera de un conjunto arbitrario no es siempre un conjunto fronterizo, o lo que es lo mismo, nada-denso, ya que la frontera es cerrada (P_4). Tenemos el caso del conjunto Q de los racionales en la recta real, cuya frontera $\beta(Q) = R$ evidentemente no-fronterizo (P_2).

No obstante, podemos establecer lo siguiente:

Teorema 1. Si A es un conjunto abierto o cerrado en un espacio (E, d), entonces $\beta(A)$ es nada-denso.

DEMOSTRACIÓN. Como $\beta(A)$ es cerrado, basta demostrar que es fronterizo (P_4). Tenemos:

$$E - \beta(A) = E - [\bar{A} \cap (\overline{E-A})] = (E - \bar{A}) \cup [E - (\overline{E-A})].$$

Si A es abierto, $E-A$ es cerrado (Corolario 3′ de 2.4) y es igual a su clausura, por tanto

$$E - \beta(A) = (E - \bar{A}) \cup A,$$

que es denso por el Lema 1.

Si A es cerrado coincide con su clausura, y designando

$$B = E - A$$

obtenemos:

$$E - \beta(A) = B \cup (E - \bar{B}),$$

que también es denso por el Lema 1.

Afortunadamente, el borde de todo conjunto es fronterizo.

Teorema 2. Para todo conjunto A en un espacio (E, d), $b(A)$ es fronterizo.

DEMOSTRACIÓN. En virtud de la propiedad B_3 del borde de un conjunto (2.5)

$$b(A) = A - \mathring{A} = A \cap (E - \mathring{A}).$$

Tomando complementos:

$$E-b(A) = E-[A\cap(E-\mathring{A})] = (E-A)\cup\mathring{A}$$

conjunto que es denso en virtud del Lema 1.

Es importante conocer la naturaleza de un conjunto que es la unión de nada-densos. Veamos primero el caso de la unión de un número finito de éstos.

Teorema 3. Si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ son conjuntos nada-densos en un espacio métrico (E, d), entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es nada-denso.

DEMOSTRACIÓN. Basta con probar que si A y B son conjuntos nada-densos, $A\cup B$ es nada-denso, ya que, por inducción, podemos extender el resultado a cualquier número finito.

Designemos por

$$C = \mathring{\overline{A\cup B}};$$

pero entonces

$$C\subset\overline{A\cup B},$$

y como

$$\overline{A\cup B} = \bar{A}\cup\bar{B}$$

(Teorema 6 de 2.4),

$$C\subset\bar{A}\cup\bar{B}$$

lo cual implica

$$C\cap(E-\bar{B})\subset\bar{A}.$$

Pero $C\cap(E-\bar{B})$ es abierto y $\mathring{\bar{A}} = \phi$ por ser nada-denso (P_8), luego

$$C\cap(E-\bar{B}) = \phi,$$

de donde

$$C\subset\bar{B};$$

Pero también $\mathring{\bar{B}} = \phi$ y C es abierto, entonces $C = \phi$ y $A\cup B$ es nada-denso (P_8).

Si los A_i constituyen una familia infinita y contable de nada-densos, nada puede asegurarse, en general, acerca de su unión, la cual puede no ser siquiera fronteriza. Para que lo sea se requiere una propiedad adicional del espacio (completitud), y este resultado es el famoso teorema de Baire que veremos más adelante.

Por ejemplo, sea el espacio métrico (Q, d), donde Q es el conjunto de los números racionales y d es la métrica inducida por la de la recta real (ver 1.4). Es fácil comprobar que todo conjunto en (Q, d) constituido por un solo punto es nada-denso; la familia de todos ellos es contable, por serlo Q, y su unión es Q, el cual no es fronterizo en (Q, d) (P_2).

El lema siguiente es de carácter puramente auxiliar y nos servirá para demostrar el Teorema de Baire.

Lema 2. A y B son conjuntos en un espacio (E, d), tales que B es nada-denso y $A-B$ es fronterizo, entonces A es fronterizo.

DEMOSTRACIÓN. Teniendo en cuenta que $A-B$ es fronterizo y aplicando los Teoremas 6 y 7 de 2.4:

$$E = \overline{E-(A-B)} = \overline{E-[A\cap(E-B)]} = \overline{(E-A)\cup B} =$$
$$= (\overline{E-A})\cup\bar{B} = (E-\mathring{A})\cup\bar{B},$$

lo cual implica que $\mathring{A}\subset\bar{B}$, de donde $\mathring{A}\subset\mathring{\bar{B}}$; pero $\mathring{\bar{B}} = \phi$ en virtud de P_8. Luego $\mathring{A} = \phi$ y A es fronterizo (P_6). ●

EJERCICIOS

1. Para cualquier par de puntos $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ en R^n, definimos:

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

$$d_2(x, y) = \text{máx}\,\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|, \cdots, |x_n-y_n|\}.$$

   a) Demostrar que d_1 y d_2 son métricas para R^n.
   b) En los casos $n = 2$, $n = 3$, describir la representación geométrica de las esferas abiertas respecto a d_1 y d_2.

2. Demostrar que un conjunto no vacío en un espacio métrico cualquiera es abierto si y sólo si es la unión de una familia de esferas abiertas.

3. Sea A un conjunto no vacío de números reales y acotado superiormente. Designemos por $\lambda = \sup A$. Demostrar:

$$\lambda \notin A \Longrightarrow \lambda \in A'.$$

4. Demostrar que todo conjunto abierto y no vacío en R contiene números racionales e irracionales.

5. Demostrar que todo conjunto cerrado en R es intersección en una familia contable de abiertos.

6. Sea A un conjunto de números reales abierto, no vacío y acotado superior e inferiormente.
Designemos por $\alpha = \inf A$, $\beta = \sup A$.
Demuéstrese que $\alpha \notin A$, $\beta \notin A$.

7. Demostrar que, en R^n, la clausura de una esfera abierta es la cerrada del mismo centro y radio y su frontera es la superficie esférica correspondiente.

8. Si A y B son conjuntos en un espacio métrico (E, d), demuéstrese que

$$(A \cap B)' \subset A' \cap B', \quad (A \cup B)' = A' \cup B'.$$

Póngase un ejemplo en el cual la primera relación es una inclusión propia.

9. A es abierto y B cualquiera en un espacio (E, d). Demuéstrese que

$$A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}, \quad \overline{A \cap \bar{B}} = \overline{A \cap B}.$$

10. Si A es abierto y B cualquiera en un espacio (E, d), compruébese

$$A \cap B = \phi \Longleftrightarrow A \cap \bar{B} = \phi.$$

11. Demostrar que, en un espacio métrico *discreto*, todo conjunto es abierto y cerrado a la vez.

12. Demuéstrese directamente que $d(x, A) = 0 \Longrightarrow x \in \bar{A}$.

13. En un espacio métrico (E, d) tomamos $a \in E$ y $r > 0$. Probar que

$$\{x \in E \mid d(x, a) > r\} \text{ es abierto y}$$
$$\{x \in E \mid d(x, a) \geq r\} \text{ es cerrado.}$$

14. A es un conjunto cualquiera, no vacío, en un espacio métrico (E, d). Demostrar las siguientes equivalencias:

$$x \in \overset{\circ}{\widehat{E-A}} \Longleftrightarrow d(x, A) > 0,$$
$$x \in \mathring{A} \Longleftrightarrow d(x, E-A) > 0,$$

(se supone que $A \neq E$).

15. A y B son conjuntos no vacíos en (E, d). Probar:

$$d(A, B) = d(\bar{A}, \bar{B}).$$

16. Verificar que para cualquier conjunto de A en (E, d):

$$\bar{A} = \mathring{A} \cup \beta(A).$$

17. Probar que, si A y B son conjuntos cualesquiera en (E, d),

$$\beta(A \cup B) \subset \beta(A) \cup \beta(B).$$

Demostrar que si $\bar{A} \cap \bar{B} = \phi$, la inclusión se transforma en igualdad. Proporcionar un ejemplo en el cual la inclusión sea propia.

18. Demuéstrese el Teorema 2 de 2.6 aplicando el Teorema 1 de 2.6 y el Teorema 3 de 2.4.

19. Sea (F, d) un subespacio de (E, d) y $A \subset F$; designemos por $\mathring{A}^F$ y $\bar{A}^F$ al interior y la clausura de A en (F, d), respectivamente. Probar que

$$\mathring{A}^F = (E - \overline{F-A}) \cap F, \quad \bar{A}^F = \bar{A} \cap F.$$

20. Si A es un abierto y B es denso en (E, d), demostrar que

$$\overline{A \cap B} = \bar{A}.$$

21. Si S es un conjunto en (E, d), demuéstrese la equivalencia

$$S \text{ denso} \Longleftrightarrow \overset{\circ}{\widehat{E-S}} = \phi.$$

22. Demostrar que si S y T son abiertos y densos en (E, d), entonces $S \cap T$ es también denso.
(*Sugerencia:* Aplíquese el Teorema 3 de 2.7.)

23. Si A es un conjunto en (E, d), demuéstrese la doble implicación:

$$A \text{ cerrado y fronterizo} \Longleftrightarrow \beta(A) = A$$

24. Proporcionar un ejemplo de conjunto fronterizo que no sea nada-denso.

25. Dar un ejemplo de conjunto fronterizo y denso.

26. Demostrar que si A y B son conjuntos en (E, d), tales que $A \cup B$ es denso y B es nada-denso, entonces A es denso.

27. Proporcionar un ejemplo de una familia infinita y contable de conjuntos densos cuya intersección no sea densa.

28. Demostrar que un conjunto A en (E, d) es nada-denso si y sólo si para todo abierto B, existe un abierto S (ambos no vacíos) con $S \subset B$ y $S \cap A = \phi$.

29. Sean A y B conjuntos en (E, d). Demostrar la implicación

$$\beta(A) \cap \beta(B) = \phi \Longrightarrow \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} = \mathring{A} \cup \mathring{B}.$$

30. (F, d) es un subespacio de (E, d) y B es abierto en (F, d). Demostrar la equivalencia

$$B \text{ abierto en } (E, d) \Longleftrightarrow B \cap b(F) = \phi.$$

31. (F, d) es un subespacio de (E, d) y B es cerrado en (F, d). Demostrar la equivalencia

$$B \text{ cerrado en } (E, d) \Longleftrightarrow \bar{B} \subset F.$$

32. A es un conjunto no vacío en un espacio (E, d). Probar que

$$A' = \{x \in E \mid x \in \overline{A - \{x\}}\}.$$

CAPITULO III

Conectividad

3.1. CONJUNTOS CONEXOS

La idea intuitiva que motiva el concepto de conjunto conexo es la de ser "de una sola pieza" que no está "constituido por dos partes separadas". Tales conjuntos son de gran importancia por ser muy ricos en propiedades. Partiremos de la siguiente definición formal:

Sea A un conjunto no vacío en un espacio métrico (E, d). Decimos que los conjuntos S, T son una *disconexión* de A si son no vacíos, disjuntos, abiertos en el subespacio (A, d) y $A = S \cup T$. Si tales conjuntos existen decimos que A admite una disconexión. En general, si A admite una disconexión, ésta puede no ser única.

Decimos que el conjunto A es *disconexo* si admite alguna disconexión.

Decimos que el conjunto A es *conexo* si no es disconexo, es decir, si no admite disconexión.

Nótese que si S y T son una disconexión de A, S y T son también cerrados en (A, d). En efecto, como $S \cap T = \phi$, entonces

$$S = A - T, \quad T = A - S,$$

y aplicamos el Teorema 3 de 2.4. O sea que S y T son ambos abiertos y cerrados en (A, d).

Supongamos de nuevo que A es disconexo y que S y T son una disconexión de A. S no es vacío y tampoco coincide con A, ya que $T = A - S$ no es vacío; además, S es abierto y cerrado en (A, d). Recíprocamente, supongamos que existe un subconjunto propio (no vacío y no coincidente con A) S de A que es abierto y cerrado en (A, d). Consideremos entonces $T = A - S$. T no es vacío porque S no coincide con A, y es abierto en (A, d) por ser S cerrado en (A, d). Por otra parte, es evidente que

$$S \cap T = \phi \text{ y } A = S \cup T.$$

De manera que S y T son una disconexión de A y éste es disconexo.

En resumen, hemos demostrado que A es disconexo si y sólo si existe un subconjunto propio de A que es abierto y cerrado en (A, d).

Dicho de manera equivalente: A es conexo si y sólo si los únicos conjuntos abiertos y cerrados en (A, d) son el conjunto vacío ϕ y A.

Es muy fácil proporcionar ejemplos de conjuntos conexos y disconexos en un espacio métrico cualquiera. El caso más sencillo: un conjunto constituido por un solo punto es siempre conexo trivialmente. Un conjunto constituido por dos esferas abiertas y disjuntas es siempre disconexo. Una esfera abierta no es, en general, un conjunto conexo, pero volveremos sobre esto más adelante.

Decimos que el espacio métrico (E, d) es conexo (disconexo), si el conjunto E es conexo (disconexo).

Por ejemplo, un espacio métrico discreto de más de un punto es siempre disconexo. Veremos más adelante que R, R^n y, en general, todo espacio normado son espacios conexos.

Veamos una sencilla caracterización de espacios conexos en términos de fronteras (2.5). Supongamos que A es un subconjunto propio en un espacio métrico (E, d) y que $\beta(A) = \phi$. Entonces $\bar{A} - \mathring{A} = \phi$, lo cual implica que

$$A = \bar{A} = \mathring{A},$$

es decir, que A es abierto y cerrado en (E, d). O sea que E es disconexo, lo mismo que (E, d). Recíprocamente, supongamos que (E, d) o, lo que es igual, E es disconexo. Existe entonces un subconjunto propio A de E abierto y cerrado, es decir,

$$A = \bar{A} = \mathring{A},$$

lo cual implica:

$$\beta(A) = \phi.$$

En resumen, un espacio métrico es conexo si y sólo si todo subconjunto propio tiene frontera no vacía.

A propósito de fronteras, supongamos que un conjunto A intersecta a otro B y también al complemento de B. Es intuitivamente evidente que si A es "de una sola pieza" (conexo), A intersectará forzosamente la "concha" (frontera) de B. Esto resulta ser cierto en cualquier espacio métrico, como se establece en el siguiente teorema de frecuente utilidad.

Teorema 1. A y B son conjuntos en (E, d) tales que A es conexo,

$$A \cap B \neq \phi \text{ y } A \cap (E-B) \neq \phi;$$

entonces

$$A \cap \beta(B) \neq \phi.$$

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos que $A \cap \beta(B) = \phi$; entonces, aplicando propiedades de la frontera (2.5),

$$A \cap B = (A \cap B) \cup [A \cap \beta(B)] = A \cap [B \cup \beta(B)] =$$

$$= A \cap \bar{B} = A \cap [\mathring{B} \cup \beta(B)] = A \cap \mathring{B}.$$

Es decir,

$$A \cap B = A \cap \bar{B} = A \cap \mathring{B}.$$

O sea que $A \cap B \neq \phi$ es abierto y cerrado en (A, d), en virtud de los teoremas 1 y 2 de 2.6. Pero A es conexo, luego $A \cap B = A$, de donde $A \subset B$, lo cual implica $A \cap (E-B) = \phi$ que contradice la hipótesis.

No podemos, pues, suponer que $A \cap \beta(B) = \phi$.

3.2. CLAUSURA Y UNION DE CONEXOS

Nos proponemos determinar lo que sucede al clausurar o unir conjuntos conexos, si se preserva o no la conectividad.

Teorema 1. Si A y B son conjuntos en (E, d) tales que A es conexo y

$$A \subset B \subset \bar{A},$$

entonces B es conexo.

Demostración. Supongamos que S, T son conjuntos abiertos en (E, d) tales que

$$B = (S \cap B) \cup (T \cap B) \text{ y } (S \cap B) \cap (T \cap B) = \phi.$$

Como $A \subset B$, tenemos:

$$A = (S \cap A) \cup (T \cap A) \text{ y } (S \cap A) \cap (T \cap A) = \phi;$$

pero A es conexo y, por lo tanto, no admite disconexión, o sea que

$$S \cap A = \phi$$

(o bien $T \cap A = \phi$, lo cual conduciría a resultados análogos).

Si $x \in \bar{A} \cap S$, entonces S es un entorno de $x \in \bar{A}$ y aplicando el Teorema 2 de 2.4, resultaría $S \cap A \neq \phi$.
De manera que

$$S \cap \bar{A} = \phi;$$

pero $B \subset \bar{A}$, luego $S \cap B = \phi$ y B es conexo por no admitir disconexión alguna. ●

Corolario 1'. Si A es un conjunto conexo, entonces $\bar{A}$ es conexo.

Demostración. $A \subset \bar{A} \subset \bar{A}$ y aplíquese el teorema anterior. ●

Es intuitivamente evidente que la unión de conjuntos conexos puede no ser conexa. Por ejemplo, la unión de dos conjuntos conexos y disjuntos puede, aunque no siempre (véase el Ejercicio 9) resultar disconexa. Sin embargo, si la intersección en la familia no es vacía, entonces la unión es conexa, pero podemos demostrar algo más general.

Teorema 2. Sea F una familia de conjuntos conexos (E, d). Si existe un $A_0 \in F$ tal que $\forall A \in F$, $A \cap A_0 \neq \phi$, entonces $B = \bigcup_{A \in F} A$ es conexo.

Demostración. Sean S y T conjuntos abiertos en (E, d) tales que

$$B = (S \cap B) \cup (T \cap B) \text{ y } (S \cap B) \cap (T \cap B) = \phi.$$

Tomemos un $A \in F$ cualquiera. Como $A \subset B$ tenemos:

$$A = (S \cap A) \cup (T \cap A) \text{ y } (S \cap A) \cap (T \cap A) = \phi;$$

pero A es conexo y, por lo tanto, no admite disconexión, o sea que

$$T \cap A = \phi$$

(o bien $S \cap A = \phi$ y las consecuencias serían análogas), de donde

$$A = S \cap A \quad (\text{ó } A = T \cap A)$$

es decir,

$$A \subset S \quad (\text{ó } A \subset T).$$

En particular, supongamos que

$$A_0 \subset S.$$

Si para algún

$$A \in F : A \subset T,$$

entonces

$$A \cap A_0 \subset (S \cap B) \cap (T \cap B) = \phi,$$

lo cual contradice la hipótesis. De manera que

$$\forall\, A \in F : A \subset S$$

lo cual implica $B \subset S$, es decir $B = B \cap S$, de donde $B \cap T = \phi$ y B es conexo por no admitir disconexión.

Corolario 2'. Si F es una familia de conjuntos conexos de (E, d) tal que

$$\bigcap_{A \in F} A \neq \phi,$$

entonces $\bigcup_{A \in F} A$ es conexo.

Si se trata de sólo dos conjuntos conexos A y B podemos obtener un resultado más general. En efecto, basta con que $\bar{A} \cap B$ o $A \cap \bar{B}$ no sea vacío para que $A \cup B$ sea conexo, aun cuando $A \cap B = \phi$ (es el Ejercicio 9).

3.3. COMPONENTES DE UN CONJUNTO

Un conjunto no vacío contiene siempre conjuntos conexos, por ejemplo, cualquier subconjunto constituido por un solo punto. Nos proponemos determinar los "máximos" conjuntos conexos contenidos en él. Estos se denominan componentes del conjunto y su número y "tamaño" nos darán una idea del grado en que dicho conjunto se aproxima a ser conexo. Visto de otra manera, nos proponemos descomponer un conjunto cualquiera en sus "máximas" partes de "una sola pieza".

Sea A un conjunto no vacío de una espacio métrico (E, d). Tomemos un $x \in A$ y consideremos la familia de todos los conjuntos conexos contenidos en A y que contienen a x. Es evidente que esta familia no es vacía, ya que $\{x\}$ pertenece a ella. Por otra parte, la intersección de todos sus miembros contiene a x y es, por tanto, no vacía. En virtud del Corolario 2′ de 3.2, deducimos que la unión de todos los conjuntos de la familia es un conjunto conexo que indicamos por $C(x)$ y lo llamamos *componente* de A. Es consecuencia inmediata de su construcción que $C(x)$ es el "máximo" conjunto conexo contenido en A y que contiene a x. Es decir, si B es conexo, $x \in B$ y $B \subset A$, entonces B es miembro de la familia cuya unión es $C(x)$, luego $B \subset C(x)$.

Puede muy bien suceder que $C(x) = \{x\}$. Por ejemplo, el conjunto Q de los números racionales como subconjunto de la recta real es tal que $C(x) = \{x\}, \forall x \in Q$.

Si $\forall x \in A$, $C(x) = \{x\}$, decimos que A es *totalmente disconexo.*

Llamamos *componentes del espacio* a los componentes del conjunto E. Asimismo, decimos que el espacio (E, d) es totalmente disconexo si lo es el conjunto E. Por ejemplo, un espacio métrico discreto es totalmente disconexo.

Si A es un conjunto no vacío de (E, d), es evidente que

$$A = \bigcup_{x \in A} C(x).$$

Por otra parte, los componentes de A son disjuntos dos a dos. En efecto, sean $x, y \in A$ y supongamos que

$$C(x) \cap C(y) \neq \phi.$$

Pero entonces, aplicando el Corolario 2′ de 3.2, el conjunto

$$C(x) \cup C(y)$$

es conexo y contiene a x; luego $C(x) \cup C(y) \subset C(x)$ y, como siempre $C(x) \subset C(x) \cup C(y)$, resulta $C(x) = C(x) \cup C(y)$. Pero esto último implica que $C(y) \subset C(x)$.
De manera totalmente análoga concluiríamos:

$$C(x) \subset C(y). \quad \text{O sea que} \quad C(x) = C(y).$$

En resumen, hemos demostrado que dos componentes cualesquiera son disjuntos o coincidentes.

Los componentes de A constituyen, pues, una partición de A: son disjuntos dos a dos y la unión de todos ellos es A. Esta partición de A determina una relación de equivalencia que designaremos por $\sim$ sobre A, según la cual, si $x, y \in A$, $x \sim y$, significa que x y y pertenecen al mismo componente, es decir, que $C(x) = C(y)$. Las clases de equivalencia respecto a $\sim$ son precisamente los componentes. Nótese, sin embargo, que basta con que x, y estén contenidos ambos en algún conjunto conexo B, a su vez contenido en A, para que $x \sim y$. En efecto, necesariamente $B \subset C(x)$, $B \subset C(y)$, lo cual implica que $B \subset C(x) \cap C(y)$, siendo B no vacío. Luego, por lo establecido arriba, $C(x) = C(y)$; de donde $x \sim y$.

Como la unión de todos los componentes de A es igual a A, si existe sólo un componente C tendremos que $A = C$ y, por lo tanto, A es conexo. Recíprocamente, si A es conexo, es inmediato que $A = C(x)$, $\forall\, x \in A$; o sea que existe sólo un componente.

En resumen, A es conexo si y sólo si admite un único componente.

En particular, si aplicamos estas conclusiones al conjunto E, deducimos que el espacio (E, d) es conexo si y sólo si todo par de puntos está contenido en un conjunto conexo. En efecto, si E es conexo la afirmación es trivial ya que todo par de puntos está contenido en E. Recíprocamente, si $\forall\, x, y \in E$, existe un conexo que los contiene, entonces $x \sim y$, o sea que todos los puntos de E pertenecen a un mismo componente, lo cual nos dice que existe un solo componente y E es conexo.

Por ejemplo, un espacio métrico en el cual toda esfera abierta es conexa, es conexo, ya que cualquier par de puntos del espacio siempre se puede encerrar en una esfera abierta. Tal es el caso de un espacio normado, como se verá más adelante.

Teorema 1. Si A es un conjunto no vacío de (E, d) sus componentes son cerrados en el subespacio (A, d).

DEMOSTRACIÓN. Sea C un componente de T. Teniendo en cuenta que

$$C \subset A,$$

tenemos:

$$C \subset \bar{C} \cap A \subset \bar{C},$$

lo cual implica, en virtud del Teorema 1 de 3.2, siendo C conexo, que $\bar{C} \cap A$ es conexo; pero, como C es el máximo conjunto conexo que contiene cualquiera de sus puntos, resulta

$$C = \bar{C} \cap A.$$

O sea que por el Teorema 2 de 2.6, C es cerrado en el subespacio (A, d).

En particular, los componentes del espacio son conjuntos cerrados.

No es cierto, en general, que los componentes de A sean abiertos en (A, d). Por ejemplo, hemos visto que los componentes de Q en la recta real son conjuntos constituidos por un solo punto, que no son abiertos en Q. Sin embargo, si el número de componentes de A es finito, ellos son también abiertos en (A, d) (aplíquese el Teorema 4 y el Corolario 3′ de 2.4).

3.4. ESPACIOS LOCALMENTE CONEXOS

Decimos que un espacio métrico (E, d) es *localmente conexo* si para todo punto $x \in E$ y todo entorno S de x, existe un entorno T de x tal que $T \subset S$ y T es conexo.

O sea que, si tenemos un entorno de un punto, siempre podemos hallar un entorno más pequeño que es un conjunto conexo.

Los espacios localmente conexos son importantes por la riqueza de sus propiedades.

Es necesario destacar que conectividad y conectividad local son conceptos independientes. Es decir, un espacio métrico puede ser conexo sin serlo localmente; así mismo puede ser localmente conexo sin ser conexo. Existen espacios que son ambas cosas y otros que no son ninguna de las dos.

Por ejemplo, veremos más adelante que la recta real es un espacio conexo y localmente conexo, lo que, eventualmente, generalizaremos a todo espacio normado. Un espacio métrico discreto de más de un punto es localmente conexo pero no conexo. El espacio constituido por el conjunto de los números racionales con la métrica inducida por la de la recta real, no es conexo ni localmente conexo. Existen también espacios métricos conexos que no son

localmente conexos; pero su construcción es generalmente muy elaborada y exige conocimientos que no hemos desarrollado en este momento.

El siguiente resultado es de frecuente utilidad.

Teorema 1. Si en (E, d) toda esfera abierta es un conjunto conexo, entonces (E, d) es un espacio conexo y localmente conexo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in E$ y S un entorno cualquiera de x. Como S es abierto y $x \in S$, existe un $r > 0$ tal que $N(x; r) \subset S$; pero $N(x; r)$ es un entorno de x y, por hipótesis, conexo. (E, d) es pues localmente conexo.

Para demostrar que E es conexo, tomemos un $x_0 \in E$ cualquiera. Es inmediato que

$$E = \bigcup_{n \in N} N(x_0; n),$$

donde N es el conjunto de los números naturales (excluimos el 0). Ahora bien, cada una de las $N(x_0; n)$ es conexa y la intersección de todas ellas no es vacía, ya que x_0 está en todas. Concluimos que su unión, o sea E es conexo (Corolario 2′ de 3.2).

Existe una especie de recíproco de este teorema, pero no lo demostraremos aquí.

Finalmente, caracterizamos los espacios localmente conexos en términos de componentes de conjuntos abiertos.

Teorema 2. Un espacio métrico (E, d) es localmente conexo si y sólo si los componentes de todo conjunto abierto son abiertos.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que los componentes de todo conjunto abiertos son abiertos. Sea $x \in E$ y S un entorno cualquiera de x. Designemos por T al componente de S que contiene a x. Entonces T es conexo, $T \subset S$ y T es un entorno de x por ser abierto en virtud de la hipótesis. O sea que (E, d) es localmente conexo.

Recíprocamente, supongamos que (E, d) es localmente conexo y sea A un conjunto abierto. Consideremos un componente C de A y demostremos que es abierto.

Tomemos un $x \in C$, de donde $x \in A$ y por ser A abierto, A es un entorno de x. Pero entonces existe un entorno conexo S de x tal que $S \subset A$, lo cual implica, por ser C un componente, que $S \subset C$. Ahora bien, C es evidentemente la unión de todos estos conjuntos abiertos S correspondientes a cada uno de sus puntos. C es, pues, un conjunto abierto por ser la unión de abiertos.

En particular, para un espacio localmente conexo, los componentes del espacio son conjuntos abiertos y cerrados. Esto implica, de paso, que si el espacio es disconexo, cualquier componente y su complemento constituyen una disconexión. Lo mismo puede suceder si el espacio no es localmente conexo.

3.5. CONECTIVIDAD EN LA RECTA REAL

Por su particular importancia, nos proponemos caracterizar los conjuntos conexos en el espacio métrico constituido por el conjunto R de los números reales, junto con la métrica usual, inducida por el valor absoluto. La relación de orden total de que está provisto R juega un papel decisivo en descubrir la naturaleza de los conjuntos conexos.

Antes que nada, conviene precisar el concepto de *intervalo.* Sea A un conjunto no vacío de números reales, decimos que A es un intervalo, si para todo par de puntos $x, z \in A$ se cumple que para todo $y \in R$ con $x \leq y \leq z$, entonces $y \in A$.

Expresado de manera equivalente, A es un intervalo si A contiene todos los puntos comprendidos entre cualquier par de sus puntos.

Así pues, de acuerdo con esta definición R es un intervalo, lo mismo que un conjunto constituido por un solo punto.

También son intervalos los siguientes conjuntos, con seguridad conocidos previamente como tales por el lector. La comprobación de que satisfacen nuestra definición es inmediata; en todo caso, $a, b \in R$ y $a < b$:

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \in R \mid a < x < b\}, \\
(a, b] &= \{x \in R \mid a < x \leq b\}, \\
[a, b) &= \{x \in R \mid a \leq x < b\}, \\
[a, b] &= \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}.
\end{aligned}$$

Si $C \in R$, también son intervalos los conjuntos:

$$\begin{aligned}
(C, +\infty) &= \{x \in R \mid C < x\}, \\
[C, +\infty) &= \{x \in R \mid C \leq x\}, \\
(-\infty, C) &= \{x \in R \mid x < C\}, \\
(-\infty, C] &= \{x \in R \mid x \leq C\}.
\end{aligned}$$

Preferimos no dar la interpretación intuitiva alguna a los símbolos $+\infty$, $-\infty$. Debe tomarse simplemente como parte del símbolo elegido para designar el conjunto definido a la derecha.

Geométricamente es claro que los cuatro primeros intervalos son segmentos de la recta en los cuales se incluyen o excluyen los extremos. En cuanto a los cuatro últimos, se trata de semirrectas desde C.

Dejamos al lector la fácil tarea de comprobar que un intervalo es R o un conjunto constituido por un solo punto, o uno de los ocho tipos que definimos antes. Todo se reduce a considerar los casos en que está acotado superior o inferiormente.

Estamos ahora en condiciones de demostrar el resultado fundamental.

Teorema 1. Los únicos conjuntos conexos en la recta real son los intervalos.

DEMOSTRACIÓN. Primero debemos demostrar que todo intervalo I es conexo. Si I contiene sólo un punto, ya sabemos que es conexo.

Supongamos que I contiene más de un punto y que es disconexo. Sea pues, $I = S \cup T$, donde S y T son abiertos en el subespacio I, ambos no vacíos y $S \cap T = \phi$.

Tomemos $x \in S$, $z \in T$; como necesariamente $x \neq z$, supongamos que $x < z$ y consideremos el conjunto

$$C = [x, z] \cap S.$$

$x \in C$, o sea $C \neq \phi$. Por otra parte, C está acotado superiormente por z; sea pues

$$y = \sup C,$$

entonces $x \leq y \leq z$, lo cual implica que $y \in I$ por ser I un intervalo.

Como consecuencia de la definición de extremo superior, $y \in \bar{C}$. Pero $C \subset S$, de donde $\bar{C} \subset \bar{S}$; o sea que $y \in \bar{S}$; pero entonces $y \in \bar{S} \cap I$.

Ahora bien, S es también cerrado en el subespacio I, lo cual implica de manera fácilmente comprobable que

$$S = \bar{S} \cap I.$$

Tenemos pues que $y \in S$. Luego, debe ser $y < z$; pero S es abierto en I, entonces existe un $r > 0$ tal que

$$(y-r, y+r) \cap I \subset S.$$

(Nótese que $(y-r, y+r) \cap I = N(y; r) \cap I$ es una esfera abierta en I).

Tomemos un $t \in R$ tal que $y < t < \text{mín}\{z, y+r\}$. Entonces $t \in (y-r, y+r)$, y como $y < t < z$, resulta que $t \in I$. Tenemos pues que $t \in S$, pero $x < t < z$, de donde $t \in C$. Esto contradice la definición de y.

En definitiva, no podemos suponer que I sea disconexo.

Recíprocamente, sea A un conjunto no vacío de números reales y conexo. Si A contiene sólo un punto es un intervalo. Supongamos que A contiene más de un punto. Tomemos $x, z \in A$ con $x < z$ y consideremos que para algún $y \in R$ tal que $x < y < z$ sucede que $y \notin A$.

Es muy sencillo comprobar que los conjuntos $(-\infty, y)$ $(y, +\infty)$ son abiertos; entonces $(-\infty, y) \cap A$, $(y, +\infty) \cap A$ son abiertos en A y, lo que es más, constituyen una disconexión de A. En efecto, no son vacíos, ya que el primero contiene a x y el segundo a z; su unión es claramente A y son disjuntos por serlo $(-\infty, y)$, $(y, +\infty)$.

O sea que A resulta ser disconexo. Tenemos pues que para todo $y \in R$ con $x \leq y \leq z$, necesariamente $y \in A$. A es entonces un intervalo.

En particular, R es conexo; pero podemos establecer algo más poderoso.

Corolario 1'. La recta real es un espacio conexo y localmente conexo.

DEMOSTRACIÓN. Una esfera abierta es un intervalo y, en virtud del teorema anterior, un conjunto conexo. Se aplica entonces el Teorema 1 de 3.4.

El Teorema 1, junto con su Corolario 1' nos permiten describir la estructura de los conjuntos abiertos de la recta real. Según el Ejercicio 2 del Capítulo II un conjunto abierto en cualquier espacio métrico es la unión de esferas abiertas, en este caso sería de intervalos abiertos; pero podemos decir mucho más como establece el siguiente resultado de particular interés.

Teorema 2. Todo conjunto abierto y no vacío de la recta real es la unión en una familia contable de intervalos abiertos disjuntos dos a dos.

DEMOSTRACIÓN. Sea A un conjunto abierto y no vacío de la recta real. Consideremos la familia de los componentes de A; sabemos que éstos son disjuntos dos a dos y que su unión es A. Por otra parte, como los componentes son conjuntos conexos, se trata de intervalos por el Teorema 1; pero en virtud del Corolario 1', la recta real es un espacio localmente conexo, o sea que por el Teorema 2 de 3.4, los componentes de A son abiertos, o sea pues, que son intervalos abiertos.

Sólo falta demostrar que estos intervalos abiertos constituyen una familia F contable.

Cada $I \in F$ contiene infinitos números racionales. Elijamos uno de ellos $r \in I$. Definamos entonces una función $f : F \to Q$, donde Q es el conjunto de los racionales, tal que $\forall I \in F : f(I) = r$. Resulta que f es inyectiva; en efecto, tomemos $I, I' \in F$ con $I \neq I'$. Esto implica que $I \cap I' = \phi$, o sea que $f(I) \neq f(I')$. F es, pues, contable.

EJERCICIOS

1. Proporcionar un ejemplo que revele que el interior de un conjunto conexo no es, en general, conexo.

2. A y B son conjuntos cerrados y no vacíos de un espacio (E, d). Demostrar que si $A \cup B$ y $A \cap B$ son conexos, entonces A y B son conexos.

3. A y B son conexos y $A \subset B$. Si C es abierto y cerrado en el subespacio $B - A$, demostrar que $A \cup C$ es conexo.

4. Si A y B son conjuntos de (E, d) tales que $\bar{A} \cap B = \phi$ y $A \cap \bar{B} = \phi$, se dice que A y B están *separados*.

   Demostrar que si $A \cap B = \phi$ y son ambos abiertos o ambos cerrados, entonces están separados.

5. Supóngase que A y B están separados. Demostrar:

$$A \cup B \text{ abierto} \Longrightarrow A \text{ y } B \text{ son abiertos,}$$
$$A \cup B \text{ cerrado} \Longrightarrow A \text{ y } B \text{ son cerrados.}$$

6. Demostrar que si $d(A, B) > 0$, entonces A y B están separados. Proporcionar un ejemplo que revele que el recíproco no es, en general, cierto.

7. Demostrar que un espacio (E, d) es disconexo si y sólo si es la unión de dos conjuntos separados.

8. Si A y B son conjuntos conexos de (E, d) y no están separados, demuéstrese que $A \cup B$ es conexo.

9. Si A y B son conjuntos conexos de (E, d) y $\bar{A} \cap B \neq \phi$, demuéstrese que $A \cup B$ es conexo.

10. Sean $A_1, A_2, \cdots, A_n$ conjuntos conexos y $A_i \cap A_{i+1} \neq \phi$ $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$. Demostrar que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es conexo.

11. Demostrar que un espacio métrico discreto, de más de un punto, es totalmente disconexo y localmente conexo.

12. Demostrar que el conjunto Q de los números racionales es totalmente disconexo en la recta real.

13. Sea A un conjunto conexo, abierto y cerrado en (E, d). Demostrar que A es un componente de E.

14. Sean A y B conjuntos conexos y $A \subset B$. Si C es un componente de $B-A$, demuéstrese que $B-C$ es conexo.

15. Sea C un componente de un conjunto abierto A de un espacio localmente conexo (E, d). Probar que $A \cap \beta(C) = \phi$.

16. Sea C un componente de un conjunto A de un espacio localmente conexo (E, d). Demostrar:

    a) $\overset{\circ}{C} = C \cap \overset{\bullet}{A}$.
    b) $\beta(C) \subset \beta(A)$.
    c) Si A es cerrado, entonces $\beta(C) = C \cap \beta(A)$.

17. Se dice que un espacio (E, d) es *encadenado*, si para todo $\varepsilon > 0$ y $\forall x, y \in E$, existen puntos $x_0, x_1, \cdots, x_n \in E$ con $x_0 = x$, $x_n = y$, tales que

$$d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon \text{ (para } i = 0, 1, \cdots, n-1).$$

    Demostrar que si (E, d) es conexo, entonces es encadenado.

18. Demostrar que el conjunto de puntos de R^2 con, al menos, una coordenada irracional es conexo.

19. Sea C un conjunto no vacío, cerrado y acotado superior e inferiormente en la recta real. Probar que C es un intervalo cerrado o bien puede obtenerse de un intervalo cerrado removiendo una familia contable de intervalos abiertos, disjuntos dos a dos, cuyos extremos están todos en C.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en (E, d) y $\varepsilon > 0$ un número real cualquiera. Supongamos que $x_n \to x$ para algún $x \in E$. De acuerdo con la definición, existe un $\nu \in N$ tal que $\forall n \geq \nu : x_n \in N(x; \varepsilon)$ es decir,

$$\forall n \geq \nu : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Recíprocamente, supongamos que, a cada $\varepsilon > 0$ corresponde un $\nu \in N$ tal que

$$\forall n \geq \nu : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Sea S un entorno de x; existe entonces un $r > 0$ tal que

$$N(x; r) \subset S.$$

Según la hipótesis, a $r > 0$ corresponde un $\nu \in N$ tal que

$$\forall n \geq \nu : d(x_n, x) < r,$$

o lo que es lo mismo $x_n \in N(x; r)$; es decir,

$$x_n \in S, \ \forall n \geq \nu \text{ y } x_n \to x.$$

En resumen, hemos deducido la siguiente definición equivalente: $x_n \to x$ si y sólo si a cada $\varepsilon > 0$ corresponde un $\nu \in N$ tal que

$$\forall n \geq \nu : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

En adelante, emplearemos cualquiera de las dos definiciones según convenga en las circunstancias.

Si el espacio métrico en cuestión es un espacio normado con la métrica inducida por la norma (ejemplo 3 de 1.1), la segunda definición adopta la forma: $x_n \to x$ si y sólo si a cada $\varepsilon > 0$ corresponde un $\nu \in N$ tal que

$$\forall n \geq \nu : \|x_n - x\| < \varepsilon;$$

ello incluye a la recta real como caso particular, donde la norma es el valor absoluto.

Antes de proporcionar algunos ejemplos de sucesiones convergentes, conviene establecer de una vez la unicidad del límite.

Teorema 1. El límite de una sucesión convergente en un espacio métrico es único.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $x_n \to x$, $x_n \to y$, $x \neq y$; es decir, ambos puntos x, y satisfacen la definición de límite de la sucesión $\{x_n\}$.

Aplicando el Lema 1 de 4.3, existen entornos S, T de x, y respectivamente, con $S \cap T = \phi$.

Al entorno S corresponde un $v_1 \in N$ tal que

$$\forall n \geq v_1 : x_n \in S;$$

al entorno T corresponde un $v_2 \in N$ tal que

$$\forall n \geq v_2 : x_n \in T.$$

Luego, si tomamos un $m \in N$ con $m \geq$ máx $\{v_1, v_2\}$, es decir, no menor que v_1 *ni* v_2, resulta que

$$x_m \in S \cap T,$$

lo cual contradice que $S \cap T = \phi$.

No podemos pues suponer la existencia de más de un límite.

Procedemos a considerar algunos ejemplos de sucesiones convergentes. Posiblemente el caso más sencillo es el de una sucesión semiconstante (o en particular, constante) $\{x_n\}$ en un espacio cualquiera (E, d); es decir, existe un punto $x \in E$ tal que $x_n = x$, $\forall n \geq v$, donde v es algún número natural. La comprobación de que $x_n \to x$ es trivial.

Sea ahora $\{x_n\}$ una sucesión en la recta real. Decimos que ésta es *creciente* si $\forall n \in N : x_n \leq x_{n+1}$ y, análogamente, la llamamos *decreciente* si $\forall n \in N : x_n \geq x_{n+1}$.

Una sucesión se denomina *monótona* si es creciente o decreciente.

Supongamos que $\{x_n\}$ es creciente y que su rango está acotado superiormente. Sea $x \in R$ el extremo superior del rango y $\varepsilon > 0$ un número real cualquiera. Como $x - \varepsilon < x$, $x - \varepsilon$ no puede ser cota superior del rango de la sucesión; debe, pues, existir un término x_v con

$$x - \varepsilon < x_v \leq x.$$

Dado que la sucesión es creciente, resulta que

$$\forall n \geq v : x_v \leq x_n \leq x;$$

o sea que

$$\forall n \geq v : x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon,$$

desigualdades que son equivalentes a:

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

Tenemos entonces que $x_n \to x$.

Por otra parte, si $\{x_n\}$ es una sucesión decreciente cuyo rango está acotado inferiormente y $x \in R$ es el extremo inferior de éste, se demuestra de manera totalmente análoga que $x_n \to x$.

Las sucesiones monótonas en la recta real son particularmente importantes, no sólo por su frecuente aparición, sino por la facilidad con que se establece la existencia del límite, según se vio anteriormente.

El siguiente teorema, de gran utilidad, señala que un punto de acumulación de un conjunto es siempre el límite de sucesiones en el conjunto.

Teorema 2. Si x es un punto de acumulación de un conjunto A en un espacio (E, d), existe una sucesión $\{x_n\}$ en A, cuyos términos son distintos dos a dos y $x_n \to x$.

DEMOSTRACIÓN. Como x es punto de acumulación de A, toda esfera abierta de centro x contendrá infinitos puntos (distintos de x) de A. Apoyándonos en esta afirmación procedemos a construir, por inducción, la requerida sucesión $\{x_n\}$ en A.

Tomemos una sucesión de términos reales $\{r_n\}$ tal que $r_n \to 0$ y $\forall n \in N : r_n > 0$. Por ejemplo,

$$\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots, {}^1/_n, \ldots\},$$

la cual es decreciente y se comprueba fácilmente que converge a 0.

Elegimos arbitrariamente un $x_0 \in A \cap N(x; r_0)$.

Supongamos que se han tomado ya los términos $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, distintos dos a dos y tales que

$$x_i \in A \cap N(x; r_i), \text{ para } i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Elegimos ahora un $x_n \in A \cap N(x; r_n)$ con $x_n \neq x_i$, para $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Queda pues determinada, por inducción, una sucesión $\{x_n\}$ en A, cuyos términos son distintos dos a dos y, en virtud de su construcción,

$$\forall n \in N : d(x_n, x) < r_n.$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $r_n \to 0$, existe un $\nu \in N$ tal que $\forall n \geq \nu : r_n < \varepsilon$ (se prescinde del valor absoluto, ya que $r_n > 0$). Resulta entonces que

$$\forall n \geq \nu : d(x_n, x) < \varepsilon, \text{ es decir, } x_n \to x.$$

Basta un ligero examen de la demostración del teorema precedente para percatarse de que, en general, existirán muchas sucesiones diferentes que cumplen los requisitos exigidos. Por otra parte, el recíproco es también cierto y se deja al lector. Aprovechamos el teorema para proporcionar, mediante sucesiones, una importante caracterización de los puntos de adherencia de un conjunto: son precisamente aquellos que son límite de sucesiones en el conjunto.

Corolario 2'. Sea A un conjunto no vacío en un espacio métrico. $x \in \bar{A}$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}$ en A con $x_n \to x$.

DEMOSTRACIÓN. Sabiendo que $\bar{A} = A \cup A'$, supongamos que $x \in \bar{A}$. Si $x \in A'$ el Teorema 2 nos asegura la existencia de una sucesión en A que converge a x.

Si $x \in A$, basta con tomar la sucesión constante $\{x_n\}$, tal que $\forall n \in N$: $x_n = x$, que está en A y $x_n \to x$ trivialmente.

Recíprocamente, supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión en A con $x_n \to x$. Demostraremos que $x \in \bar{A}$ aplicando el Teorema 2 de 2.4:

Sea S un entorno de x; existe entonces un $\nu \in N$ tal que $\forall n \geq \nu$: $x_n \in S$. Pero, como la sucesión está en A, también $x_n \in A$, es decir, $x_n \in S \cap A$. O sea $S \cap A \neq \phi$ y $x \in \bar{A}$.

Pasamos ahora a definir el importante y útil concepto de sucesión parcial de una dada.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un conjunto no vacío X. Si $\{y_n\}$ es otra sucesión en X, la idea, al decir que es parcial de la $\{x_n\}$, es la de indicar que todos sus términos son términos de $\{x_n\}$. Lo que sucede si adoptamos esa definición, es que caemos en casos muy triviales. Por ejemplo, la sucesión constante $\{y_n\}$ tal que $\forall n \in N : y_n = x_3$, sería parcial de la $\{x_n\}$.

Si pretendemos que el concepto sea fructífero debemos descartar tales casos imponiendo restricciones que los eviten. La manera de hacerlo es impedir que un mismo término x_n se tome más de una vez para constituir la sucesión parcial. Acogiendo esta idea obtenemos la definición satisfactoria y precisa.

Sea $f : N \to X$ una sucesión y $g : N \to N$ una inyección (función inyectiva). Decimos entonces que $f \circ g : N \to X$ es una sucesión parcial de f.

Empleando la notación acostumbrada, $\forall n \in N : f(n) = x_n$, resulta que, si designamos por $\{y_n\}$ a la sucesión parcial, $\forall n \in N : y_n = (f \circ g)(n) = f[g(n)] = x_{g(n)}$. O sea que, ciertamente, los y_n son todos términos de la $\{x_n\}$. Por otra parte, si $n \neq m$ entonces $g(n) \neq g(m)$, por ser g inyectiva, de manera que y_n, y_m no son el mismo término de $\{x_n\}$.

Conviene notar que los y_n puede que no aparezcan en el mismo orden relativo que tienen como términos de $\{x_n\}$.

Podemos expresar la definición de manera equivalente: Se dice que la sucesión $\{y_n\}$ es parcial de la $\{x_n\}$, si existe una inyección $g : N \to N$ tal que $\forall n \in N : y_n = x_{g(n)}$.

Obsérvese que, como no se exige que g sea sobreyectiva, pueden existir x_n que no figuran en $\{y_n\}$.

Es evidente que toda sucesión es parcial de sí misma. En ese caso la inyección g es la función idéntica (biyectiva) $N \to N$.

Supongamos que $\{z_n\}$ es una sucesión parcial de $\{y_n\}$, bajo una inyección $g_1 : N \to N$, es decir, $\forall n \in N : z_n = y_{g_1(n)}$. Aceptemos también que $\{y_n\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$, bajo una inyección $g_2 : N \to N$, es decir, $\forall n \in N : y_n = x_{g_2(n)}$. Sabiendo que el compuesto de dos inyecciones es otra inyección y escribiendo $\forall n \in N : z_n = y_{g_1(n)} = x_{g_2[g_1(n)]} = x_{g_2 \circ g_1(n)}$, deducimos que $\{z_n\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$. Podemos decir que la "parcialidad" es transitiva.

Si suprimimos de $\{x_n\}$ un conjunto arbitrario y finito de términos y conservamos los restantes en su mismo orden relativo obtenemos una sucesión parcial de $\{x_n\}$. (Véase el Ejercicio 1).

Dada una sucesión $\{x_n\}$, se dice que la $\{y_n\}$ proviene de ella mediante una reordenación de sus términos, si existe una biyección $g : N \to N$ tal que $\forall n \in N : y_n = x_{g(n)}$.

Es evidente que $\{y_n\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$, ya que toda biyección es inyectiva. Por otra parte, esta definición traduce fielmente nuestra idea intuitiva de "reordenar" o "alterar el orden" de los términos de una sucesión. Nótese que también $\{x_n\}$ proviene de $\{y_n\}$ mediante una reordenación de sus términos, ya que $\forall n \in N : x_n = x_{g[g^{-1}(n)]} = y_{g^{-1}(n)}$.

Proporcionar ejemplos de sucesiones parciales de una dada equivale a construir inyecciones de $N \to N$.

Cuando se trata de sucesiones en un espacio métrico, muchas de sus propiedades son heredadas por sus sucesiones parciales. Veremos en seguida que ello sucede con la convergencia, más aún, se conserva el mismo límite.

Con objeto de facilitar la demostración del teorema que sigue, conviene hacer una observación evidente: Sea $\{z_n\}$ una sucesión en un espacio (E, d) y $z \in E$, entonces $z_n \to z$ si y sólo si, para todo entorno S de z, el conjunto $\{n \in N \mid z_n \notin S\}$ es finito.

Teorema 3. Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente en un espacio métrico, entonces toda sucesión parcial de ella converge al mismo límite.

Demostración. Sea $x = \text{lím}\ x_n$ e $\{y_n\}$ una sucesión parcial de $\{x_n\}$ bajo una inyección $g : N \to N$, es decir, $\forall n \in N : y_n = x_{g(n)}$.

Sea S un entorno cualquiera de x. Luego, el conjunto

$$N_s = \{n \in N \mid x_n \notin S\}$$

CAPITULO IV

Compacidad

4.1. CONJUNTOS ACOTADOS. DIAMETRO

El lector conoce el concepto de conjunto de números reales acotado superior e inferiormente, pero tal noción está ligada a la relación de orden en R, y como un espacio métrico no está, en general, provisto de una relación de orden, no podemos extender la idea directamente. No obstante, si pensamos en conjuntos del plano y del espacio, sin duda imaginamos, de manera intuitiva, lo que se pretende indicar al decir que el conjunto está acotado: cuando "no se extiende indefinidamente", cuando se mantiene "dentro de ciertos límites". Si tal es el caso, puede suponerse que las distancias entre los puntos del conjunto no exceden una cierta cantidad. Esta observación nos conduce a la definición precisa, aplicable a cualquier espacio métrico.

Sea A un conjunto no vacío en un espacio métrico (E, d). Decimos que A es *acotado,* si existe algún número real $k > 0$ tal que

$$\forall\, x, y \in A : d(x, y) \leq k.$$

Es consecuencia inmediata de esta definición que todo subconjunto no vacío de un conjunto acotado es también acotado.

Veamos lo que significa este concepto en la recta real.

Sea A un conjunto no vacío de números reales y acotado según esta nueva definición. Existe, pues, un $k > 0$ tal que

$$\forall\, x, y \in A : d(x, y) = |x - y| \leq k.$$

Tomemos un $x_1 \in A$ fijo; tenemos entonces

$$\forall\, x \in A : |x - x_1| \leq k,$$

pero esta desigualdad es equivalente a

$$\forall\, x \in A : x_1 - k \leq x \leq x_1 + k,$$

es decir que A está acotado superior e inferiormente.

Recíprocamente, supongamos que A es un conjunto no vacío de números reales y acotado superior e inferiormente. Si a es una cota inferior y b una cota superior, se tiene que

$$A \subset [a, b],$$

de donde

$$\forall\, x, y \in A : x, y \in [a, b],$$

lo cual implica

$$|x - y| \leq b - a;$$

o sea que A está acotado según la nueva definición.

En resumen, que un conjunto en la recta real sea acotado es equivalente a decir que está acotado superior e inferiormente.

Sea A un conjunto no vacío en un espacio (E, d). De acuerdo con la definición, decir que A es acotado es equivalente a que el conjunto de números reales

$$\{d(x, y)\}, \text{ para todo par } x, y \in A,$$

está acotado superiormente. Tiene, pues, sentido considerar su extremo superior, al cual designamos por

$$\delta(A) = \sup_{x, y \in A} \{d(x, y)\}$$

y lo llamamos *diámetro* del conjunto A. Recíprocamente, si existe tal extremo superior, es decir si el conjunto A tiene diámetro, A está acotado.

Si el conjunto A no es acotado preferimos decir que carece de diámetro.

Como la distancia entre dos puntos es siempre un número real mayor o igual que cero, resulta que

$$\delta(A) \geq 0.$$

Si el conjunto A contiene sólo un punto, el conjunto $\{d(x, y)\}$ está constituido únicamente por 0, de donde $\delta(A) = 0$. Recíprocamente, si A no es vacío y $\delta(A) = 0$, entonces $\forall x, y \in A : 0 \leq d(x, y) \leq 0$, es decir, $d(x, y) = 0$, o sea que $x = y$, lo que indica que A está constituido por un solo punto.

Conviene advertir que si A es acotado, pueden no existir puntos $x, y \in A$ tales que $d(x, y) = \delta(A)$. Por ejemplo, es fácil comprobar que el diámetro del intervalo abierto (a, b) (para $a < b$), en la recta real, es $b - a$, y sin embargo, la distancia entre cualquier par de puntos es siempre estrictamente menor que $b - a$. Existen, no obstante, ciertos conjuntos (compactos) para los cuales se pueden hallar tales puntos, como se verá más adelante.

Será ya evidente al lector la interpretación intuitiva del concepto de diámetro. Es algo así como la "máxima" distancia que se puede "medir" dentro del conjunto.

La alusión geométrica producida al poner el nombre de diámetro es evidente y sugestiva.

Si A es acotado y B no es vacío, es consecuencia inmediata de la definición de diámetro que

$$B \subset A \Longrightarrow \delta(B) \leq \delta(A).$$

Salta a la vista que la implicación contraria no es, en general, cierta. Considérese, por ejemplo, el caso en que B contiene sólo un punto, el cual no pertenece a A. Por otra parte, la inclusión propia no necesariamente implica la desigualdad estricta. Es decir, B puede ser un subconjunto propio de A, y, sin embargo, darse el caso $\delta(B) = \delta(A)$. Considérese el ejemplo $B = (a, b)$, $A = [a, b]$ en la recta real o, más espectacularmente, B constituido solamente por los puntos a y b.

Sea ahora $N(a; r)$ una esfera abierta cualquiera en un espacio métrico (E, d). Tenemos

$$\forall x, y \in N(a; r) : d(x, y) \leq d(x, a) + d(y, a) < 2r.$$

Resulta pues, que la esfera abierta es un conjunto acotado y su diámetro

$$\delta(N(a; r)) \leq 2r.$$

Procediendo de manera idéntica, deducimos que la esfera cerrada $\bar{N}(a; r)$ y la superficie esférica $S(a; r)$ son también acotadas y el diámetro de cada una no excede $2r$.

Por chocante que sea a la intuición, no podemos asegurar que, en general, el diámetro de una esfera abierta (o la cerrada o la superficie esférica) sea igual a dos veces su radio. Si, por ejemplo (E, d) es un espacio métrico discreto y $a \in E$, la esfera $N(a; 1)$ contiene sólo a y su diámetro es, por tanto, cero.

En todo espacio normado, por el contrario, el diámetro de una esfera es siempre igual a dos veces su radio (Ejercicio 3).

El teorema siguiente, cuya interpretación intuitiva hace parecerlo obvio, es de muy frecuente utilidad.

Teorema 1. Sea A un conjunto no vacío en un espacio métrico (E, d). A es acotado si y sólo si está contenido en una esfera abierta cuyo centro puede ser cualquier punto del espacio.

DEMOSTRACIÓN. Si A está contenido en una esfera abierta entonces A es acotado por ser subconjunto de un conjunto acotado.

Recíprocamente, supongamos que A es acotado y sea $\delta(A)$ su diámetro. Tomemos un punto cualquiera $a \in E$ y construyamos una esfera abierta de centro a y que contenga A. En efecto, como A no es vacío, elegimos arbitrariamente un $x_1 \in A$ y con radio $r = d(a, x_1) + \delta(A) + 1$, consideramos la esfera abierta $N(a; r)$. Tenemos

$$\forall x, y \in A : d(x, a) \leq d(a, x_1) + d(x; x_1) \leq d(a, x_1) + \delta(A) <$$
$$< d(a, x_1) + \delta(A) + 1, \text{ es decir } x \in N(a; r).$$

También el siguiente resultado es intuitivamente evidente y será de apreciable utilidad.

Lema 1. Si A es un conjunto acotado en (E, d), entonces

$$\delta(\bar{A}) = \delta(A).$$

DEMOSTRACIÓN. Tomemos un número real $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Para $x, y \in \bar{A}$ cualesquiera, en virtud del Teorema 2 de 2.4, existen puntos $p, q \in A$ tales que

$$p \in N(x; \varepsilon/2), \quad q \in N(y; \varepsilon/2).$$

Entonces

$$d(x,y) \leq d(x,p) + d(y,p) \leq d(x,p) + d(y,q) + d(p,q) < \delta(A) + \varepsilon.$$

De esta desigualdad se deduce que $\bar{A}$ es acotado y que

$$\delta(\bar{A}) \leq \delta(A) + \varepsilon;$$

pero, como ε es arbitrario

$$\delta(\bar{A}) \leq \delta(A). \tag{1}$$

Por otra parte, de $A \subset \bar{A}$ y sabiendo que $\bar{A}$ es acotado, obtenemos:

$$\delta(A) \leq \delta(\bar{A}),$$

lo cual, junto con (1) demuestra el lema. ●

Corolario 1'. Un conjunto es acotado si y sólo si es acotada su clausura.

Lamentablemente, no existe relación entre un conjunto y su interior en cuanto a sus diámetros o el mismo hecho de ser acotado. (Ejercicios 2 y 4.)

4.2. CONJUNTOS PRECOMPACTOS Y SEPARABLES

Un concepto nuevo, de gran importancia y utilidad, es el de conjunto precompacto. Es una propiedad algo más restrictiva que la de ser acotado, como veremos en seguida. Su motivación e interpretación intuitivas no son claras y antes que correr el riesgo de confundir en lugar de aclarar, preferimos abstenernos de hacer especulaciones. Procedemos, pues, a la definición precisa y formal directamente.

Sea A un conjunto no vacío en un espacio (E, d).

Decimos que A es *precompacto* si a cualquier número real $\varepsilon > 0$ corresponde un conjunto finito de puntos $x_1, x_2, \cdots, x_n \in A$ tales que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} N(x_k; \varepsilon).$$

Se observa de inmediato que si A es finito, entonces A es precompacto: basta con tomar a todos los puntos de A como centros de las esferas. El recíproco es también cierto en un espacio métrico discreto (Ejercicio 5), pero no en cualquier espacio; por ejemplo, no es difícil comprobar que un intervalo acotado de infinitos puntos en la recta real es precompacto.

Teorema 1. En un espacio métrico cualquiera, todo conjunto precompacto es acotado.

DEMOSTRACIÓN. Sea A un conjunto precompacto en un espacio (E, d). Tomando $\varepsilon = 1$, existe un conjunto finito de puntos $x_1, x_2, \cdots, x_n \in A$ tales que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} N(x_k; 1). \tag{1}$$

Sea h el máximo de todas las distancias $d(x_i, x_j)$, para $i=1,\cdots,n$, $j=1,\cdots,n$.

Tomemos ahora $x, y \in A$ cualesquiera. En virtud de (1)

$$x \in N(x_i; 1), \quad y \in N(x_j; 1);$$

luego

$$d(x,y) \leq d(x,x_i) + d(y,x_i) \leq d(x,x_i) + d(y,x_j) + d(x_i,x_j),$$

o sea que

$$d(x,y) < 2 + h$$

y A es acotado.

El recíproco de este teorema no es, en general, cierto.

Sea, por ejemplo, (E, d) un espacio métrico discreto de infinitos puntos. El conjunto E es acotado, de hecho $\delta(E) = 1$; pero no es precompacto por ser infinito (Ejercicio 5). No obstante, veremos mucho más adelante que en un espacio normado de dimensión finita (y sólo en tales espacios normados) todo conjunto acotado es precompacto. Ello sucede, en particular, en la recta real y en R^n.

El siguiente resultado es de frecuente utilidad.

Teorema 2. Si A es un conjunto precompacto de un espacio (E, d), todo subconjunto no vacío de A es precompacto.

DEMOSTRACIÓN. Sea B un conjunto no vacío con $B \subset A$ y demostremos que B es precompacto.

Dado $\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito de puntos $z_1, z_2, \cdots, z_p \in A$ tales que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{p} N(z_k; \varepsilon/2);$$

de donde

$$B \subset \bigcup_{k=1}^{n} N(z_k; {}^{\varepsilon}/_{2})$$

para un $n \leq p$, luego de haber desechado las esferas que no contienen puntos de B y haber reordenado las z_k si es preciso.

Por cada $k = 1, \cdots, n$ tomemos un punto

$$x_k \in B \cap N(z_k; {}^{\varepsilon}/_{2})$$

y consideremos la esfera abierta $N(x_k; \varepsilon)$.

Luego,

$$\forall\, y \in N(z_k; {}^{\varepsilon}/_{2}):$$

$$d(y, x_k) \leq d(y, z_k) + d(x_k, z_k) < \varepsilon,$$

es decir

$$y \in N(x_k; \varepsilon),$$

o sea

$$N(z_k; {}^{\varepsilon}/_{2}) \subset N(x_k; \varepsilon)$$

para cada

$$k = 1, 2, \cdot\cdot, n.$$

De allí que

$$B \subset \bigcup_{k=1}^{n} N(x_k; \varepsilon)$$

para $x_1, x_2, \cdots, x_n \in B$ y B es precompacto.

Conviene hacer del conocimiento del lector que en la literatura matemática se emplea con frecuencia el nombre de conjunto "totalmente acotado" en lugar de precompacto. Hemos preferido este último por ser más breve.

Pasamos a definir el concepto de separabilidad. Esta es una propiedad de considerable importancia en topología general; pero en nuestro caso es de un carácter puramente auxiliar en nuestro estudio de compacidad. De la única propiedad de conjuntos separables que haremos uso es la establecida en el Teorema 3.

Algunas de las muchas e interesantes propiedades de separabilidad pueden verse en los ejercicios al final de este capítulo.

Se dice que un conjunto no vacío A de un espacio métrico (E, d) es *separable* si existe un conjunto contable S con $S \subset A$, tal que $A \subset \bar{S}$.

Se deduce de inmediato que $\bar{A} = \bar{S}$.

Se dice que el espacio (E, d) es separable, si el conjunto E es separable. En este caso la definición se reduce a que existe un conjunto denso y contable.

La recta real es el ejemplo clásico de espacio separable, ya que el conjunto Q de los números racionales es denso y contable.

Es evidente que todo conjunto contable (lo cual incluye los finitos) es separable.

Sea A un conjunto del espacio métrico (E, d). Una familia F de conjuntos de (E, d) tal que

$$A \subset \bigcup_{B \in F} B$$

recibe el nombre de *cobertura* de A; se dice también que F *cubre* a A. Una subcobertura de F es una subfamilia de F que también cubre a A.

Decimos que F es una *cobertura abierta* de A, si F cubre a A y todos los conjuntos de F son abiertos.

Las coberturas abiertas juegan un papel importante en topología, especialmente en lo relativo a compacidad, como se verá más adelante.

El siguiente resultado establece una propiedad de conjuntos separables relacionada con coberturas y de la cual haremos uso.

Teorema 3. Si A es un conjunto separable de (E, d), toda cobertura abierta de A admite una subcobertura contable.

DEMOSTRACIÓN. Sea F una cobertura abierta de A.

Como A es separable, existe un conjunto contable S tal que

$$S \subset A \text{ y } A \subset \bar{S}.$$

Designemos

$$S = \{x_1, x_2, \dots\}.$$

Sea G la familia contable de todas las esferas abiertas de la forma $N(x_n; {}^1/_m)$, para $x_n \in S$ y $m \geq 1$ es un número natural.

Designemos $G = \{N_1, N_2, \dots\}$.

Tomemos un $N_k \in G$. Si existe alguno o algunos $B \in F$ con $N_k \subset B$, seleccionamos uno de ellos y lo llamamos B_k. Construimos de esta manera una subfamilia contable F_1 de $F : F_1 = \{B_1, B_2, \dots\}$.

Demostremos que F_1 cubre a A.

Tomemos un $x \in A$. Como F es una cobertura de A, existe algún $B \in F$ con $x \in B$; pero como B es abierto, existe un $r > 0$ tal que

$$N(x; r) \subset B.$$

Elijamos un número natural $m \geq 1$ con

$$0 < {}^1/_m < {}^r/_2.$$

Ahora bien, $x \in \bar{S}$, ya que $A \subset \bar{S}$, y esto implica en virtud del Teorema 2 de 2.4, teniendo en cuenta que $N(x; {}^1/_m)$ es un entorno de x, que existe algún $x_n \in S$ con $x_n \in N(x; {}^1/_m)$; pero entonces

$$d(x_n, x) < {}^1/_m, \text{ es decir } x \in N(x_n; {}^1/_m).$$

Por otra parte, si

$$y \in N(x_n; {}^1/_m)$$

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(y, x_n) < {}^2/_m < r,$$

o sea

$$y \in N(x; r),$$

es decir

$$N(x_n; {}^1/_m) \subset N(x; r),$$

entonces

$$N(x_n; {}^1/_m) \subset B;$$

pero, sabiendo que

$$N(x_n; {}^1/_m) \in G,$$

la construcción de F_1 nos dice que

$$N(x_n; {}^1/_m) \subset B_k \text{ para } B_k \in F_1.$$

De allí que $x \in B_k$, es decir $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ y F_1 constituye una subcobertura contable de F.

Interesa a nuestros propósitos establecer que los conjuntos precompactos poseen la propiedad enunciada en el teorema anterior. Ello se debe a que todo conjunto precompacto es separable, hecho importante por sí mismo.

Teorema 4. En un espacio métrico todo conjunto precompacto es separable.

DEMOSTRACIÓN. Sea A un conjunto precompacto de un espacio (E, d).

Para todo número natural $m \geq 1$ existe un conjunto finito de puntos

$$x_{m,1}, x_{m,2}, \ldots, x_{m,n} \in A$$

tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(x_{m,i}; {}^1/_m)$$

(evidentemente que, en general, n depende de m).

Sea S el conjunto contable de todos los $x_{m,i}$ para todo número natural $m \geq 1$. Tenemos que $S \subset A$ y, si demostramos que $A \subset \bar{S}$, entonces A es separable.

Haremos uso del Teorema 2 de 2.4.

Tomemos un $x \in A$ cualquiera y sea $\varepsilon > 0$ un número real. Elijamos un número natural m tal que

$$0 < {}^1/_m < \varepsilon.$$

En virtud de la definición de S, existe un $x_{m,i} \in S$ con $x \in N(x_{m,i}; {}^1/_m)$, es decir, $d(x, x_{m,i}) < {}^1/_m < \varepsilon$; pero como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, esto implica que

$$d(x, S) = 0,$$

de donde $x \in \bar{S}$. O sea que $A \subset \bar{S}$.

El recíproco de este teorema no es, en general, cierto, ya que un conjunto separable puede no ser acotado, en cuyo caso deja de ser precompacto por el Teorema 1. Ejemplo de esto es el conjunto R en la recta real.

4.3. CONJUNTOS COMPACTOS

Sea A un conjunto no vacío en un espacio métrico.

Decimos que A es *compacto* si toda cobertura abierta de A admite una subcobertura finita.

Es difícil interpretar intuitivamente el concepto de conjunto compacto o motivar su definición. No obstante, puede decirse que se trata de una generalización topológica de conjunto finito. En efecto, todo conjunto finito es compacto, como se comprueba de inmediato, y a pesar de que ciertamente existen conjuntos compactos infinitos, veremos que sus propiedades topológicas los hacen muy semejantes a los finitos.

Históricamente, la idea de conjunto compacto tuvo su origen en el famoso teorema de Heine-Borel, en el espacio R^n, el cual veremos en el capítulo siguiente. Allí se establece que todo conjunto cerrado y acotado posee la propiedad que hemos adoptado para definir compacto. Ocurrió, pues, darle nombre propio a tales conjuntos y considerarlos en cualquier espacio.

La importancia de los conjuntos compactos en topología métrica o general es fundamental. La riqueza de sus propiedades y facilidad de su manejo los hace desempeñar un papel primordial.

Sea A un conjunto no vacío en un espacio métrico.

Decimos que A posee la *propiedad de Bolzano-Weierstrass,* si todo subconjunto infinito T de A admite un punto de acumulación en A, es decir, $T' \cap A \neq \phi$. Para abreviar, a tales conjuntos los llamaremos BW.

Si A es un conjunto finito, es BW. En efecto, ¿qué subconjunto infinito de A no admite puntos de acumulación en A?

Nuestro propósito en lo que sigue es el de descubrir las propiedades fundamentales de los conjuntos compactos. Entre ellos se destaca que compacidad y BW son la misma cosa en un espacio métrico.

Finalmente y para hacer que la definición de compacto aparezca menos rebuscada, observemos que en el Teorema 3 de 4.2 se estableció que toda cobertura abierta de un conjunto separable admite una subcobertura contable. Más aún, el recíproco es también cierto (véase el Ejercicio 9); o sea que tal propiedad caracteriza a los conjuntos separables en un espacio métrico y ha podido adoptarse como definición de éstos. Esta consideración conduce, de manera natural, a definir conjuntos para los cuales toda cobertura abierta se reduce una subcobertura finita.

El lema siguiente establece una sencilla propiedad, obvia desde un punto de vista intuitivo, pero de utilidad muy frecuente en este y otros capítulos.

Lema 1. Si x, y son puntos de un espacio (E, d), tales que $x \neq y$, existe un entorno S de x y un entorno T de y con $S \cap T = \phi$.

DEMOSTRACIÓN. Nótese que, como $x \neq y$, $d(x, y) > 0$. Sea entonces

$$r = \tfrac{1}{2} d(x, y)$$

y consideremos las esferas abiertas

$$S = N(x; r), \ T = N(y; r),$$

que son entornos de x y y, respectivamente.

Para demostrar que $S \cap T = \phi$, basta con tomar $z \in S$ genérico y probar que $z \notin T$.

En efecto:

$$2r = d(x, y) \leq d(z, x) + d(z, y) < r + d(z, y),$$

de donde $d(z, y) > r$, es decir $z \notin T$.

El teorema que sigue, si se compara con el lema precedente, asemeja un conjunto compacto a un punto, lo cual refuerza lo que para nosotros sugiere el vocablo "compacto".

Teorema 1. Sea A un conjunto compacto y x un punto, ambos en un espacio métrico. Si $x \notin A$, existe un entorno S de x y un conjunto abierto T con $A \subset T$ tales que $S \cap T = \phi$.

DEMOSTRACIÓN. Si $y \in A$, necesariamente $x \neq y$, ya que $x \notin A$.

De acuerdo con el lema precedente, existe un entorno $S(y)$ de x y un entorno $T(y)$ de y con $S(y) \cap T(y) = \phi$.

La familia de entornos $T(y)$ para todo $y \in A$ es una cobertura abierta de A. Como éste es compacto, existe una cobertura finita

$$\{T(y_1), T(y_2), \cdots, T(y_n)\}.$$

Estos entornos se corresponden con entornos de x $\{S(y_1), S(y_2), \cdots, S(y_n)\}$, tales que $S(y_k) \cap T(y_k) = \phi$ para $k = 1, 2, \cdots, n$.

Designemos

$$S = \bigcap_{k=1}^{n} S(y_k), \ T = \bigcup_{k=1}^{n} T(y_k).$$

En virtud de los teoremas 3 y 4 de 2.2, S es un entorno de x y T es un conjunto abierto.

Tenemos que $A \subset T$.

Para probar que $S \cap T = \phi$, basta con tomar un $z \in T$ genérico y comprobar que $z \notin S$. En efecto, $z \in T(y_k)$ para algún $k = 1, \cdots, n$; pero como $S(y_k) \cap T(y_k) = \phi$, $z \notin S(y_k)$, lo cual implica que $z \notin S$.

Corolario 1'. Todo conjunto compacto en un espacio métrico es cerrado.

DEMOSTRACIÓN. Sea A un conjunto compacto en (E, d). Si $A = E$, sabemos que A es cerrado. Supongamos que A es subconjunto propio de E y tomemos un $x \notin A$, es decir $x \in E - A$.

Aplicando el teorema anterior, existe un entorno S de x y un conjunto abierto T con $A \subset T$ tales que $S \cap T = \phi$. Pero entonces $S \cap A = \phi$, lo cual implica, por el Teorema 2 de 2.4, que $x \notin \bar{A}$.

Hemos demostrado que $(E - A) \cap \bar{A} = \phi$; de donde $\bar{A} \subset A$, es decir $A = \bar{A}$. A es pues cerrado.

Veremos luego que el recíproco no es cierto en general.

Teorema 2. Todo conjunto compacto en un espacio métrico es precompacto.

DEMOSTRACIÓN. Sea A compacto y $\varepsilon > 0$ un número real.

La familia de esferas abiertas $N(x; \varepsilon)$ para todo $x \in A$ es, evidentemente, una cobertura abierta de A.

Existe entonces una subcobertura finita.

$$\{N(x_1; \varepsilon), N(x_2; \varepsilon), \cdots, N(x_n; \varepsilon)\},$$

es decir

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(x_i; \varepsilon), \text{ donde } x_1, x_2, \cdots, x_n \in A.$$

Corolario 2′. Todo conjunto compacto en un espacio métrico es acotado.

DEMOSTRACIÓN. Aplicamos el teorema anterior junto con el Teorema 1 de 4.2.

Vemos ahora que un conjunto cerrado no es necesariamente compacto, ya que puede no ser acotado. Análogamente, un conjunto acotado o precompacto no es, en general, compacto, ya que puede no ser cerrado.

Más grave aún, un conjunto cerrado y acotado tampoco es, en general, compacto. Sea, por ejemplo, (E, d) un espacio métrico discreto de infinitos puntos. El conjunto E es cerrado y acotado, pero no compacto por no ser precompacto (véase el Ejercicio 5). No obstante, en el capítulo siguiente demostraremos que todo conjunto cerrado y acotado *en* R^n es compacto (Heine-Borel), y más adelante veremos que esa propiedad caracteriza a los espacios normados de dimensión finita. Tal resultado nos indica que, en

un espacio normado de dimensión infinita, ha de existir algún conjunto cerrado y acotado que no es compacto.

Si examinamos el contra-ejemplo dado arriba sobre el espacio discreto, notamos que el conjunto cerrado y acotado deja de ser compacto por no ser precompacto. Cabe preguntarse si, quizá, un conjunto precompacto y cerrado es siempre compacto. Lamentablemente, esto tampoco es cierto, en general. Veremos, sin embargo, en el capítulo siguiente, que la respuesta es afirmativa en espacios métricos completos y, lo que es más, los caracteriza.

La muestra de un ejemplo de conjunto precompacto y cerrado que no sea compacto, preferimos dejarla para el próximo capítulo, donde podremos hacerlo con toda facilidad.

Emprendemos ahora la tarea de demostrar la equivalencia entre conjuntos compactos y BW. Comenzamos con el lema siguiente, de carácter puramente auxiliar.

Lema 2. Todo conjunto BW en un espacio métrico es precompacto.

DEMOSTRACIÓN. Sea A un conjunto BW en un espacio (E, d).

Supongamos que A no es precompacto. Debe entonces existir algún número real $\varepsilon_1 > 0$ tal que no existe secuencia finita de puntos de A, de forma que las esferas abiertas de centro esos puntos y radio ε_1 cubre A.

Esto nos permite construir una sucesión infinita de puntos de A que designaremos $T = \{x_1, x_2, \cdots\}$ de la siguiente manera:

Tomamos arbitrariamente $x_1 \in A$. En virtud de nuestra hipótesis, A no puede estar contenido en $N(x_1; \varepsilon_1)$; elegimos entonces $x_2 \in A - N(x_1; \varepsilon_1)$. Suponiendo construidos $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$, notamos que A no puede estar contenido en $\bigcup_{i=1}^{n-1} N(x_i; \varepsilon_1)$ y tomamos $x_n \in A - \bigcup_{i=1}^{n-1} N(x_i; \varepsilon_1)$.

Hemos formado así, por inducción, al conjunto infinito T con $T \subset A$. En virtud de su construcción posee la propiedad:

$$\forall x_i, x_j \in T, \ i \neq j, \ d(x_i, x_j) \geq \varepsilon_1. \tag{1}$$

Dado que A es BW, existe un punto $x \in A$ que es de acumulación de T. Ello implica que el entorno $N(x; \varepsilon_1/2)$ de x contiene infinitos puntos de T y podemos tomar $x_i, x_j \in T \cap N(x; \varepsilon_1/2)$ con $i \neq j$; entonces

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x) + d(x_j, x) < \varepsilon_1,$$

lo cual contradice (1).

A debe ser precompacto.

Teorema 3. En un espacio métrico un conjunto es compacto si y sólo si es BW.

DEMOSTRACIÓN. Sea A un conjunto compacto. Si A no es BW, existe un conjunto infinito T con $T \subset A$, y tal que $T' \cap A = \phi$. Esto implica que para cada $x \in A$, $x \notin T'$, o sea que existe un entorno $S(x)$ de x tal que $T \cap S(x)$ es vacío o contiene sólo a x, si $x \in T$.

Es evidente que la familia de tales entornos $S(x)$ para todo $x \in A$ es una cobertura abierta de A, y como éste es compacto, admite una subcobertura finita:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} S(x_i),$$

pero entonces $T \subset \bigcup_{i=1}^{n} S(x_i)$. Teniendo en cuenta que, por construcción, cada $S(x_i)$ contiene, a lo más un punto de T (si $x_i \in T$), la última inclusión indica que T no contiene más de n puntos, contradiciendo la infinitud de T.

Recíprocamente, supongamos que A es BW y sea F una cobertura abierta de A.

En virtud del Lema 2, A es precompacto y, por el Teorema 4 de 4.2, A es separable. Aplicando entonces el Teorema 3 de 4.2, existe una subfamilia contable F_1 de F que también cubre A.

Designemos $F_1 = \{B_1, B_2, \cdots\}$.

Supongamos ahora que para todo número natural $n \geq 1$, $A \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ y veamos que nos conduce a una contradicción. En efecto, tal suposición nos permite construir un conjunto infinito $T = \{x_1, x_2, \cdots\}$ con $T \subset A$, de la siguiente manera:

Tomamos $x_1 \in A$ y $\forall\, n > 1$,

$$x_n \in A - \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i.$$

Ahora bien, como A es BW, existe un punto $x \in A$ de acumulación de T, y como F_1 cubre A, $x \in B_k$ para algún k natural.

Pero entonces B_k es un entorno de x, ya que es abierto, luego B_k contiene infinitos puntos de T.

Forzosamente, debe existir algún $x_n \in T \cap B_k$ con $n > k$; pero esto contradice la construcción de T, la cual hace que $x_n \notin B_k$ si $n > k$.

De manera que para algún número natural $n \geq 1$:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

y A es compacto.

En resumen, hemos establecido de manera directa o indirecta que todo conjunto compacto es precompacto, acotado, separable, cerrado y *BW*. De éstos sólo la propiedad *BW* implica compacidad en el caso general.

Más adelante se establecerá bajo qué hipótesis adicionales una o varias de las otras propiedades implican compacidad y, una vez resueltas todas las posibles interrogantes, se proporcionará un cuadro de implicaciones como útil referencia.

Es fácil darse cuenta de que no todo subconjunto de un compacto es compacto; sin embargo, si el subconjunto es cerrado, ello basta para asegurar su compacidad. Esto se demuestra en el teorema siguiente, el cual pone de manifiesto la utilidad del Teorema 3, aunque puede demostrarse directamente de la definición de compacto (véase el Ejercicio 23).

Teorema 4. Si B es un subconjunto no vacío y cerrado de un conjunto compacto A, entonces B es compacto.

DEMOSTRACIÓN. Si B es finito, es compacto. De lo contrario, sea T un subconjunto infinito de B. Como $B \subset A$, T es un subconjunto infinito de A y como este último es *BW* (Teorema 3), existe un punto $x \in T' \cap A$. Pero todo punto de acumulación de T lo es de B, ya que $T \subset B$, y, como B es cerrado, pertenece a B, es decir, $x \in T' \cap B$.

Resulta, pues, que B es *BW* o sea compacto (Teorema 3).

4.4. CONJUNTOS RELATIVAMENTE COMPACTOS

El lector habrá podido notar que la compacidad es una propiedad muy exigente y, por lo tanto, restrictiva.

Conviene introducir un concepto un poco más débil que es el de compacidad relativa, el cual, sin embargo, es algo más fuerte en general que la precompacidad, como veremos más adelante.

Decimos que un conjunto no vacío en un espacio métrico es *relativamente compacto* si su clausura es compacta.

Considerando que todo conjunto compacto es cerrado, se deduce inmediatamente de la definición que un conjunto compacto es relativamente

compacto. También es trivial que un conjunto relativamente compacto y cerrado es compacto.

El siguiente resultado es, en realidad, un corolario del Teorema 4 de 4.3.

Teorema 1. Si B es un subconjunto no vacío de un conjunto relativamente compacto A, entonces B es relativamente compacto.

DEMOSTRACIÓN. De $B \subset A$ obtenemos que $\bar{B} \subset \bar{A}$; pero $\bar{A}$ es compacto y $\bar{B}$ es un subconjunto no vacío y cerrado de $\bar{A}$.

En virtud del Teorema 4 de 4.3, $\bar{B}$ es entonces compacto y B es relativamente compacto.

Es consecuencia inmediata del teorema precedente que todo subconjunto no vacío de un compacto es relativamente compacto.

Todo conjunto relativamente compacto es acotado, ya que es un subconjunto de su clausura, la cual es acotada por ser compacta. Pero podemos establecer un resultado más poderoso con igual facilidad.

Teorema 2. Todo conjunto relativamente compacto en un espacio métrico es precompacto.

DEMOSTRACIÓN. Sea A un conjunto relativamente compacto.

Su clausura $\bar{A}$ es precompacta por ser compacta (Teorema 2 de 4.3); pero A es un subconjunto no vacío de $\bar{A}$, entonces A es precompacto por el Teorema 2 de 4.2.

Cabe preguntarse si el recíproco de este teorema es cierto, lo cual equivale a considerar si un conjunto precompacto y cerrado es compacto (véase el Ejercicio 6).

Pero esta cuestión fue tratada en 4.3, luego del Corolario 2′, afirmándose que la proposición no es verdadera en el caso general e indicando que el asunto quedará dilucidado en el próximo capítulo.

EJERCICIOS

1. Probar que la unión de un número finito de conjuntos acotados es acotada.

2. Dar un ejemplo de conjunto no acotado cuyo interior sea acotado.

3. Demostrar que el diámetro de una esfera abierta en un espacio normado es igual a dos veces su radio.

4. Revelar, mediante un ejemplo, que el diámetro de un conjunto no es siempre igual al de su interior.

5. Demostrar que, en un espacio métrico discreto, un conjunto es precompacto si y sólo si es finito.

6. Probar que si un conjunto es precompacto su clausura también lo es.

7. Sea A un conjunto no vacío en un espacio métrico.
Supongamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe una familia finita de conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ que cubre A y tal que

$$\delta(A_k) < \varepsilon, \text{ para } k = 1, 2, \cdots, n.$$

Probar que A es precompacto.

8. Demostrar que el espacio R^n, con su métrica usual, es separable.

9. Sea A un conjunto no vacío en un espacio métrico. Probar que si toda cobertura abierta de A admite una subcobertura contable, A es separable.

10. Probar que, en un espacio métrico separable, todo conjunto no vacío es separable.

11. Sea A un conjunto no vacío en un espacio métrico separable. Demostrar que $A-A'$ (puntos aislados de A) es contable (se supone no vacío).

12. Demostrar que, en un espacio métrico separable, toda familia de conjuntos abiertos y disjuntos dos a dos es contable.

13. Sea A un conjunto no vacío en un espacio métrico separable, con la propiedad de que a cada $x \in A$ corresponde un entorno $S(x)$ tal que $A \cap S(x)$ contable. Probar que A es contable.

14. Se dice que un punto x es de *condensación* de un conjunto A si, para todo entorno S de x, el conjunto $S \cap A$ no es contable.

    Demostrar que si A es un conjunto no contable en un espacio métrico separable, entonces existe algún punto de condensación de A que está en A.

15. Sea A un conjunto no contable en un espacio métrico separable y C el conjunto de sus puntos de condensación. Demostrar:

a) $A - C$ es contable.
b) $A \cap C$ no es contable.
c) C es perfecto.
d) Si A es, además, cerrado: $A = S \cup T$, S perfecto, T contable.

16. Demostrar que un espacio (E, d) es compacto si y sólo si toda familia de conjuntos cerrados de intersección vacía admite una subfamilia finita de intersección vacía.

17. Probar que un conjunto no vacío A es compacto, si toda cobertura de A por esferas abiertas admite una subcobertura finita.

18. Demostrar que la unión de dos conjuntos compactos es compacta.

19. Proporcionar un ejemplo de dos conjuntos no compactos cuya unión e intersección sean compactas.

20. Sea (E, d) un espacio compacto (E es compacto) y $\{A_1, A_2, \cdots\}$ una familia contable de conjuntos cerrados no vacíos tal que $A_{n+1} \subset A_n$, $\forall n \geq 1$.
Demostrar que
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$
es cerrado y *no vacío*.

21. Si A no es vacío y B es compacto, demuéstrese la equivalencia
$$d(A, B) = 0 \iff \bar{A} \cap B \neq \phi.$$

22. A es compacto, B es abierto y $A \subset B$. Probar que existe un conjunto cerrado C con $A \subset C \subset B$.

23. Demostrar el Teorema 4 de 4.3 aplicando directamente la definición de compacidad.

24. Sea (E, d) un espacio en el cual toda esfera cerrada es compacta.
Probar que todo conjunto acotado es relativamente compacto.

25. Sea Δ la familia de todos los conjuntos relativamente compactos de un espacio (E, d).
Definamos, para $S, T \in \Delta$:
$$S \sim T \iff \bar{S} = \bar{T}.$$

Comprobar que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre Δ.
Designemos por X al conjunto cociente $^{\Delta}/_{\sim}$ y definamos

$$\rho : X \times X \to R$$

tal que, si ξ, $\eta \in X$, tomamos $S \in \xi$, $T \in \eta$, y entonces

$$\rho(\xi, \eta) = d(S, T).$$

Demuéstrese que ρ está bien definido (aplíquese el Ejercicio 15 del Capítulo II) y que (X, ρ) es un espacio métrico.

26. A es un conjunto no vacío en un espacio (E, d). Probar que A es precompacto si y sólo si a cada $\varepsilon > 0$ corresponde un conjunto finito F de puntos de E tal que

$$\forall x \in A : d(x, F) < \varepsilon.$$

CAPITULO V

Límites y espacios completos

5.1 LIMITES DE SUCESIONES

Estudiaremos detenidamente en este capítulo el concepto de límite y sus consecuencias fundamentales. Se trata de una de las ideas centrales de la Topología: teoría de la convergencia. Por otra parte, puede decirse que es el pilar sobre el cual se apoya el Análisis Matemático, cuyo desarrollo riguroso depende, en mucho, de la claridad y precisión con que se establezca aquél.

La idea de convergencia, "el paso al límite", se halla presente, de una manera rudimentaria, en las obras de Arquímedes. Luego la Matemática se orientó en otras direcciones por varios cientos de años, hasta que, en la segunda mitad del siglo XVII, la idea de límite vuelve a aparecer como elemento central en la creación del Cálculo Infinitesimal de Newton y Leibnitz. Allí también se muestra en una forma un tanto implícita y altamente intuitiva. Fue en el siglo pasado, una vez que Dedekind proporcionó la primera construcción rigurosa del cuerpo de los números reales, que el concepto de límite adquiere su formulación precisa y matemáticamente aceptable. De entonces a la actualidad ha sufrido un proceso de depuración y generalización progresivas, incorporándose al ámbito de la Topología.

De los diversos procesos de convergencia que suelen aparecer en Análisis y Topología, el más simple es el de límite de una sucesión, que procedemos a tratar en seguida. Conviene hacer del conocimiento del lector que existe una

teoría general de convergencia de reciente creación que abarca todas las demás como casos particulares. Es la teoría de Filtros, cuyo ambiente natural es la Topología General y escapa, por tanto, a las limitaciones de esta obra.

Antes que nada, conviene precisar el concepto de sucesión. Sea X un conjunto cualquiera no vacío y N el conjunto de los números naturales.

Una *sucesión* en X es una función $f : N \to X$. Resulta pues que, para todo $n \in N$, $f(n) \in X$ y emplearemos la notación

$$x_n = f(n),$$

pudiendo, según el caso, substituir la x por cualquier otra letra o símbolo, conservando el subíndice n para poner de manifiesto que se trata del elemento de X que es imagen de n bajo f.

Los elementos x_n, llamados *términos* de la sucesión, suelen escribirse en forma de "lista" ordenada en sentido creciente del subíndice:

$$\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}, \tag{1}$$

expresión que se abrevia como:

$$\{x_n\}.$$

Usualmente, no se hace referencia explícita a la función f, sino que, abusando del lenguaje, se habla de la sucesión $\{x_n\}$ (nótese que se trata de (1)). No obstante, obsérvese que (1) determina unívocamente a la función f.

No debe confundirse la expresión (1) con el rango $f(N)$ de f. Por ejemplo, sea $f : N \to R$ una sucesión en R tal que $\forall\, n \in N : f(n) = (-1)^n$. Es evidente que el rango de f es el conjunto $\{-1, 1\}$, en cambio la expresión (1) es, en este caso,

$$\{1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^n, \cdots\}.$$

Volviendo a la situación general de la sucesión $\{x_n\}$ o bien $f : N \to X$, cabe destacar que la función f puede no ser inyectiva y por tanto suceder que $x_n = x_{n'}$ para $n \neq n'$. Más aún, puede darse el caso en que f sea una función constante y entonces resultan iguales todos los términos de la sucesión, llamándose *sucesión constante*. El rango de f será un conjunto constituido por un solo elemento.

Con frecuencia ocurre que existe un $\nu \in N$ tal que $\forall n \geq \nu : x_n = x_\nu$, y a tales sucesiones las llamaremos *semi-constantes*. Es evidente que incluyen a las constantes como caso particular donde $\nu = 0$.

El rango de una sucesión semi-constante es un conjunto finito: $\{x_0, x_1, \cdots, x_\nu\}$; aunque no toda sucesión cuyo rango sea finito es semiconstante, como indica el ejemplo anterior.

En cualquier caso, el rango de una sucesión es un conjunto contable.

Una sucesión en un espacio métrico (E, d) es una sucesión en el conjunto E.

Sea pues $\{x_n\}$ una sucesión en (E, d). Decimos que un punto $x \in E$ es *límite* de $\{x_n\}$, si a cada entorno S de x corresponde un $\nu \in N$ tal que $\forall\, n \geq \nu : x_n \in S$. También se expresa diciendo que $\{x_n\}$ *converge* a x o que tiene límite x o que *tiende* a x. Así pues, si una sucesión tiene límite, se dice que es *convergente*. La notación que emplearemos indistintamente será $\lim\, x_n = x$ ó $x_n \to x$.

En breve demostraremos que una sucesión convergente admite un límite único.

Recordando la interpretación intuitiva de entorno dada en 2.3, como proximidad o cercanía al punto en cuestión, podemos imaginar al límite de la sucesión como un punto alrededor del cual se aglomeran los términos de la sucesión, en forma tal que, fijado el entorno, todos ellos, a partir de uno en adelante, se encuentran dentro de ese entorno. No se escapa la semejanza con el concepto de punto de acumulación; pero nótese que, con límite o sin él, de acuerdo al Teorema 1 de 2.3, no podemos hablar de punto de acumulación del rango de la sucesión si éste no es un conjunto infinito. Si el rango es infinito, se deduce inmediatamente de la definición que el límite es punto de acumulación de aquél. Más aún, es el único punto de acumulación del rango. En efecto, suponiendo $\{x_n\}$ de rango infinito y $x_n \to x$, consideremos un punto cualquiera $y \in E$ con $y \neq x$. Aplicando el lema 1 de 4.3, tomemos entornos S, T, de x, y, respectivamente, con $S \cap T = \phi$. En virtud de la definición de límite, existe un $\nu \in N$ tal que $\forall n \geq \nu : x_n \in S$; de manera que T contiene, a lo más, el número finito $x_0, x_1, \cdots, x_{\nu-1}$ de puntos del rango. El Teorema 1 de 2.3 nos indica que y no puede ser punto de acumulación del rango. Resulta pues que x es el único, ya que ninguno distinto de él lo es.

El recíproco no es cierto: el rango de la sucesión puede admitir un único punto de acumulación y carecer de límite. Por ejemplo, el rango de la siguiente sucesión en la recta real

$$\{1, \tfrac{1}{2}, 2, \tfrac{1}{3}, 3, \tfrac{1}{4}, \cdots\}$$

admite a 0 como único punto de acumulación y, sin embargo, es fácil comprobar su falta de límite. Es posible añadir condiciones adicionales que garanticen la convergencia; en tal sentido, véase el Ejercicio 7 y el Corolario 1′ de 5.2.

es finito, lo cual implica que el conjunto

$$\{n \in N \mid y_n \notin S\} = \{n \in N \mid x_{g(n)} \notin S\} = g^{-1}(N_s)$$

es también finito, ya que, por ser g inyectiva, contiene, a lo más, igual número de elementos que N_s.

Resulta pues que $y_n \to x$.

Es fácil advertir que el recíproco del teorema precedente no es, en general, cierto: una sucesión no convergente puede admitir sucesiones parciales convergentes. Sea, por ejemplo, la sucesión $\{(-1)^n\}$ en la recta real, es decir, $\{1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^n, \cdots\}$. Es inmediato comprobar que carece de límite. Sin embargo, la sucesión constante $\{1, 1, \cdots, 1, \cdots\}$ es parcial de ella bajo la inyección $g(n) = 2n$ y es, por supuesto, convergente.

Con hipótesis adicionales podemos lograr que el recíproco funcione. En tal sentido, véase más adelante el Lema 1 en 5.2.

Apelando a consideraciones anteriores y haciendo uso del Teorema 3, podemos decir que toda reordenación de los términos de una sucesión convergente o la supresión de un conjunto finito de sus términos origina sucesiones que convergen al mismo límite.

Es interesante observar que si el rango de una sucesión es un conjunto finito, ésta admite una sucesión parcial constante. En efecto, necesariamente ha de existir algún elemento x del rango que se repite infinitas veces en la sucesión $\{x_n\}$, es decir, existe un conjunto infinito N_1 de números naturales tal que $\forall n \in N_1 : x_n = x$.

Podemos entonces construir, por inducción, una biyección $g : N \to N_1$ o sea una inyección $g : N \to N$. Luego, la sucesión parcial $\{y_n\}$ tal que $\forall n \in N : y_n = x_{g(n)}$ es constante.

Nos proponemos ahora caracterizar a los conjuntos compactos mediante sucesiones. Comenzaremos por introducir un nuevo tipo de compacidad.

Sea A un conjunto no vacío en un espacio métrico. Decimos que A es *secuencialmente compacto* si toda sucesión en A admite una sucesión parcial convergente *en* A.

Abreviamos diciendo que A es SC.

Si A es un conjunto finito, toda sucesión en A tiene rango finito y, por la observación hecha anteriormente, admite una sucesión parcial constante y por lo tanto convergente, o sea que A es SC.

Demostraremos ahora que, en un espacio métrico, las propiedades de compacidad y SC son equivalentes.

Teorema 4. En un espacio métrico, un conjunto es SC si y sólo si es BW.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que A es BW y sea $\{x_n\}$ una sucesión en A. Si el rango de $\{x_n\}$ es finito, sabemos que $\{x_n\}$ admite una sucesión parcial constante y por tanto convergente, o sea que A es SC.

Consideremos, pues, que el rango de $\{x_n\}$ es infinito; es entonces un subconjunto infinito de A que, por ser BW, admite un punto de acumulación $x \in A$. Aplicando el Teorema 2, existe una sucesión parcial de $\{x_n\}$ que converge a x.

Recíprocamente, supongamos que A es SC. Si A es finito, es BW. De lo contrario, sea T un subconjunto infinito de A. Podemos construir, por inducción, un subconjunto infinito y contable de T, cuyos puntos sean distintos dos a dos, es decir, una sucesión $\{x_n\}$ en T, cuyos términos son distintos dos a dos, o sea que su rango es infinito. Como $\{x_n\}$ está en A y éste es SC, aquella admite una sucesión parcial $\{y_n\}$ con límite $x \in A$. Pero como los términos de $\{x_n\}$ son todos distintos, serán diferentes dos a dos los términos de $\{y_n\}$, lo cual implica que el rango de esta última es infinito; designémoslo por B. Resulta entonces que $x \in B'$; pero $B \subset T$, luego $x \in T'$ y, como también $x \in A$, A es BW.

En el Teorema 3 de 4.3 se estableció que compacidad y BW son propiedades equivalentes. En virtud del teorema precedente, podemos ahora afirmar que, en un espacio métrico, compacidad, BW y SC son conceptos equivalentes.

5.2. SUCESIONES DE CAUCHY Y ESPACIOS COMPLETOS

En la familia de todas las sucesiones en un espacio métrico, conviene distinguir aquellas, que llamaremos de Cauchy, que poseen la propiedad de que sus términos se van acercando unos a otros tanto como se desee con sólo tomarlos lo suficientemente avanzados. Tales sucesiones son algo más generales, pero estrechamente relacionadas con las convergentes, como veremos en seguida.

Antes, por supuesto, se hace necesario definirlas con precisión.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio (E, d). Se dice que $\{x_n\}$ es una *sucesión de Cauchy,* si a cada número real $\varepsilon > 0$ corresponde un $\nu \in N$ tal que para todo par de números naturales n, n', no menores que ν (abreviadamente: $\forall n, n' \geq \nu$), se verifica que

$$d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon.$$

O sea pues que, fijada cualquier cercanía (ε), por pequeña que ésta sea, siempre podemos hallar un lugar (ν) en la sucesión a partir del cual todos los términos están más próximos unos de otros, que la cercanía fijada.

Si la sucesión tiene límite x, sabemos que intuitivamente significa que sus términos se aproximan a x tanto como se desee. Parece razonable esperar que esto traiga como consecuencia que los términos se acerquen unos a otros tanto como se quiera, es decir, la sucesión debe ser de Cauchy. Esta intuición es correcta, como demuestra el teorema que sigue.

Teorema 1. En un espacio métrico toda sucesión convergente es de Cauchy.

Demostración. Supongamos que $\{x_n\}$ es un sucesión en un espacio (E, d) y que tiene límite $x \in E$.

Sea $\varepsilon > 0$; como $x_n \to x$, existe un $\nu \in N$ tal que $\forall n \geq \nu : d(x_n, x) < \varepsilon/2$. $\forall n, n' \geq \nu$ resulta pues que $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ y $d(x_{n'}; x) < \varepsilon/2$, de donde

$$d(x_n, x_{n'}) \leq d(x_n, x) + d(x_{n'}, x) < \varepsilon,$$

o sea que $\{x_n\}$ es de Cauchy.

Como consecuencia, cualquier sucesión convergente constituye un ejemplo de sucesión de Cauchy. También se usa el Teorema 1, en ocasiones, para comprobar que una sucesión no converge, verificando que no es de Cauchy.

Cabe preguntarse si el recíproco del Teorema 1 es cierto, es decir, si toda sucesión de Cauchy converge. Intuitivamente, si los términos de la sucesión se aproximan unos a otros tanto como se desee, parece razonable sospechar que ello se debe a que se están acercando a algo, o sea al límite. No obstante, aquí la intuición falla. El recíproco no es, en general, cierto. Existen sucesiones de Cauchy no convergentes.

Estas consideraciones motivan una clasificación de los espacios métricos.

Se dice que un espacio métrico es *completo* si toda sucesión de Cauchy en él es convergente. Un espacio métrico es *incompleto* si no es completo.

Se entiende pues que, en un espacio completo, las sucesiones de Cauchy y las convergentes son las mismas, es decir, una sucesión converge si y sólo si es de Cauchy. Análogamente, en un espacio incompleto deben existir sucesiones de Cauchy no convergentes. O sea que la existencia o ejemplo de alguna de ellas depende de la existencia de espacios incompletos.

Las construcciones y ejemplos de espacios completos e incompletos se efectuarán en adelante de manera directa e indirecta. Los resultados que se establecerán en 5.3 nos permitirán mostrar tales ejemplos con gran facilidad. También los ejercicios, al final del capítulo, señalan casos interesantes.

Para averiguar si una sucesión es convergente en un espacio completo, basta con verificar si es de Cauchy. La ventaja que esto ofrece es que no se requiere conocer previamente ningún punto como posible límite, cuya deter-

minación puede ser muy difícil y, en ocasiones innecesaria, cuando sólo se desea demostrar la convergencia.

Seguidamente demostraremos tres lemas y un par de corolarios que resultarán muy útiles en lo sucesivo; por otra parte, ellos proporcionarán una visión más profunda de las sucesiones de Cauchy, dando una medida de la fuerza del concepto.

Este primer lema puede interpretarse como un recíproco parcial del Teorema 3 de 5.1. Nos indica que la hipótesis adicional de que la sucesión en cuestión sea de Cauchy es suficiente para garantizar su convergencia cuando una sucesión parcial tiene límite.

Lema 1. Si una sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ en un espacio (E, d) admite una sucesión parcial convergente, entonces $\{x_n\}$ es convergente y ambas tienen el mismo límite.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{y_n\}$ una sucesión parcial de $\{x_n\}$; o sea que existe una inyección $g : N \to N$ tal que $\forall n \in N : y_n = x_{g(n)}$.

Supongamos que $y_n \to x$.

Dado $\varepsilon > 0$, como $\{x_n\}$ es de Cauchy, existe un $\nu_1 \in N$ tal que

$$\forall n, n' \geq \nu_1 : d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon/_2. \qquad (1)$$

Por otra parte, existe un $\nu_2 \in N$ tal que

$$\forall n \geq \nu_2 : d(y_n, x) < \varepsilon/_2. \qquad (2)$$

Ahora bien, el conjunto $M = g^{-1}\{0, 1, \cdots, \nu_1 - 1\}$ es finito por ser g inyectiva.

Sea pues

$$\mu = \text{máx}\, M.$$

Tomemos un número natural que sea mayor que μ y que ν_2; designémoslo por m.

Luego, como $m > \nu_2$ aplicando (2) resulta:

$$d(y_m, x) < \varepsilon/_2. \qquad (3)$$

Pero también $m > \mu$, lo cual implica que $m \notin M$, de manera que, necesariamente, $g(m) \geq \nu_1$ y, como $y_m = x_{g(m)}$ se aplica (1), resultando:

$$\forall n \geq \nu_1 : d(x_n, y_m) < \varepsilon/_2. \qquad (4)$$

Aplicando ahora la desigualdad triangular y en seguida (3) y (4) obtenemos

$$\forall n \geq \nu_1 : d(x_n, x) \leq d(x_n, y_m) + d(y_m, x) < \varepsilon;$$

o sea que $x_n \to x$.

Corolario 1'. Si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy cuyo rango admite algún punto de acumulación x, entonces $x_n \to x$.

DEMOSTRACIÓN. En virtud del Teorema 2 de 5.1, existe una sucesión parcial de $\{x_n\}$ que converge a x. Aplicando ahora el Lema 1, concluimos que $x_n \to x$.

Es muy sencillo demostrar que el rango de una sucesión convergente es un conjunto relativamente compacto (Ejercicio 6). Veamos ahora cuál es la naturaleza del rango de una sucesión de Cauchy.

Lema 2. El rango de una sucesión de Cauchy es un conjunto precompacto.

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en el espacio (E, d). Dado pues un $\varepsilon > 0$, existe un $\nu \in N$ tal que $\forall n, n' \geq \nu : d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon$; de donde $\forall n \geq \nu : d(x_n, x_\nu) < \varepsilon$, es decir, $\forall n \geq \nu : x_n \in N(x_\nu; \varepsilon)$.

Se deduce entonces que $\bigcup_{i=0}^{\nu} N(x_i; \varepsilon)$ contiene todos los términos de la sucesión y, por tanto, al rango. Además los centros $x_0, x_1, \cdots, x_\nu$ pertenecen, por supuesto, al rango.

Antes de formular preguntas sobre la validez del recíproco, obtengamos este corolario inmediato.

Corolario 2'. El rango de una sucesión de Cauchy es un conjunto acotado.

DEMOSTRACIÓN. El rango de una sucesión de Cauchy es un conjunto precompacto, de acuerdo con el Lema 2, y, en virtud del Teorema 1 de 4.2, acotado.

El recíproco del Lema 2 no es, en general, cierto. Por ejemplo, el rango de la sucesión $\{(-1)^n\}$, en la recta real, es precompacto por ser finito; sin embargo, se ve claramente que la sucesión no es de Cauchy. Dado que todo conjunto precompacto es acotado, el recíproco del corolario 2' tampoco es cierto.

No obstante, el lema siguiente nos proporciona un recíproco "débil" del Lema 2 y veremos luego que tiene implicaciones de mucha trascendencia.

Lema 3. Si el rango de una sucesión es un conjunto precompacto, ésta admite una sucesión parcial de Cauchy.

DEMOSTRACIÓN. Si el rango de la sucesión es un conjunto finito, sabemos que ésta admite una sucesión parcial constante y, por lo tanto, de Cauchy.

Consideremos, pues, una sucesión

$$S_1 = \{x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1, \ldots\}$$

(la razón de esta notación se verá claramente en lo que sigue) cuyo rango sea un conjunto precompacto e infinito.

En el transcurso de la demostración utilizaremos la notación N_r para designar una esfera abierta de radio $r > 0$ y centro algún punto del espacio.

Indiquemos por R_1 al rango de S_1.

Por hipótesis, R_1 está contenido en la unión de un número finito de esferas abiertas de radio $\frac{1}{2}$. Al menos una de ellas contendrá infinitos puntos de R_1 y éstos constituyen, respetando el orden relativo con que figuran en S_1, una sucesión parcial

$$S_2 = \{x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2, \ldots\}$$

de S_1, cuyo rango R_2 es infinito y $R_2 \subset R_1$, $R_2 \subset N_{\frac{1}{2}}$.

Razonando análogamente, R_1 está contenido en la unión de un número finito de esferas abiertas de radio $\frac{1}{3}$. Al menos una de ellas contendrá infinitos puntos de R_2 y éstos constituyen, respetando el orden relativo con que figuran como términos en S_2, una sucesión parcial

$$S_3 = \{x_1^3, x_2^3, \ldots, x_n^3, \ldots\}$$

de S_1 y S_2, cuyo rango R_3 es infinito y $R_3 \subset R_2 \subset R_1$, $R_3 \subset N_{\frac{1}{3}}$.

Procediendo por inducción, supongamos construidas hasta la sucesión

$$S_{k-1} = \{x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, \ldots, x_n^{k-1}, \ldots\}$$

tales que cada una sea parcial de todas las anteriores, sus rangos son infinitos y cumplen las relaciones $R_{k-1} \subset R_{k-2} \subset \cdots \subset R_1$, $R_i \subset N_{1/i}$ $(i = 1, \ldots, k-1)$.

Ahora bien, R_1 está contenido en la unión de un número finito de esferas abiertas de radio $^1/_k$. Al menos una de ellas contendrá infinitos puntos de R_{k-1} y éstos constituyen, respetando el orden relativo con que figuran como términos en S_{k-1}, una sucesión parcial

$$S_k = \{x^k_1, x^k_2, \dots, x^k_n \dots\}$$

de S_{k-1} y, por lo tanto, de $S_{k-2}, \dots, S_1$, cuyo rango R_k es infinito y $R_k \subset R_{k-1} \subset \dots \subset R_1$, $R_k \subset N_{1/k}$.

De esta manera hemos construido una familia $\{S_1, S_2, \dots\}$ de sucesiones tal que S_n es una sucesión parcial de todas las anteriores y su rango R_n está contenido en una esfera $N_{1/n}$

La sucesión

$$\{x^1_1, x^2_2, \dots, x^n_n, \dots\}$$

es parcial de S_1. Demostremos que es de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos un $\nu \in N$ tal que $0 < {}^2/_\nu < \varepsilon$.

Ahora bien, $\forall n, n' \geq \nu$, los puntos $x^n_n, x^{n'}_{n'}$ pertenecen a los rangos R_n, $R_{n'}$ respectivamente y $R_n \subset R_\nu$, $R_{n'} \subset R_\nu$, $R_\nu \subset N_{1/\nu}$. Se deduce que $x^n_n, x^{n'}_{n'} \in N_{1/\nu}$; pero el diámetro $\delta(N_{1/\nu}) \leq {}^2/_\nu$, lo cual implica

$$d(x^n_n\ x^{n'}_{n'}) \leq {}^2/_\nu < \varepsilon.$$

Como aplicación del Lema 3 daremos respuesta a una pregunta que se suscitara en 4.4 con motivo de lo establecido por el Teorema 2 de esa sección. En efecto, allí se demostró que todo conjunto relativamente compacto es precompacto en cualquier espacio métrico, y se planteó la posible veracidad del recíproco. Este no es, en general, cierto; pero veremos en seguida que la hipótesis adicional de completitud del espacio sí lo garantiza.

Antes se hace necesario referirnos al Ejercicio 6 del Capítulo IV, ya que haremos uso de él en la demostración que sigue. En un espacio métrico, la clausura de un conjunto precompacto A es precompacta. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Entonces

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(x_i; \varepsilon') \subset \bigcup_{i=1}^{n} \bar{N}(x_i; \varepsilon'),$$

donde $x_1, \dots, x_n \in A$. Pero el conjunto de la derecha es cerrado, luego

$$\bar{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \bar{N}(x_i; \varepsilon').$$

Nótese que

$$\bar{N}(x_i; \varepsilon') \subset N(x_i; \varepsilon) \quad \text{para } i = 1, 2, \cdots, n.$$

Entonces

$$\bar{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(x_i; \varepsilon),$$

además, $x_1, \cdots, x_n \in \bar{A}$.

Teorema 2. Todo conjunto precompacto en un espacio métrico completo es relativamente compacto.

DEMOSTRACIÓN. Sea A un conjunto precompacto y demostremos que su clausura $\bar{A}$ es SC.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $\bar{A}$. En virtud del Teorema 2 de 4.2, el rango de la sucesión es precompacto por ser un subconjunto del del precompacto $\bar{A}$. Aplicando entonces el Lema 3, $\{x_n\}$ admite una sucesión parcial de Cauchy $\{y_n\}$; pero como el espacio es completo, $\{y_n\}$ converge a un punto y. Por otra parte, la sucesión $\{y_n\}$ está también en $\bar{A}$; luego, por el Corolario 2′ de 5.1, y pertenece a la clausura de $\bar{A}$, o sea a $\bar{A}$, y éste es SC, por lo tanto, compacto.

De manera que A es relativamente compacto.

Se origina una nueva pregunta: ¿Será el teorema precedente válido en espacios completos solamente?

La respuesta es afirmativa. Tal propiedad caracteriza a los espacios completos. El recíproco del Teorema 2 es cierto.

Teorema 3. Un espacio métrico, en el cual todo conjunto precompacto es relativamente compacto, es completo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy. Su rango A, por el Lema 2, es precompacto. Luego, en virtud de la hipótesis, A es relativamente compacto, es decir, $\bar{A}$ es compacto y, por lo tanto SC.

Pero $\{x_n\}$ es una sucesión en $\bar{A}$, entonces admite una sucesión parcial convergente, lo cual implica, por el Lema 1, que $\{x_n\}$ converge. El espacio es pues completo.

De los Teoremas 2 y 3 extraemos la consecuencia de que en un espacio métrico incompleto, deben existir necesariamente conjuntos precompactos que no son relativamente compactos.

5.3. SUBESPACIOS COMPLETOS

En 1.4 se vio que si (E, d) es un espacio métrico y F es un conjunto cualquiera no vacío en aquél, entonces (F, d) es un espacio métrico, donde d es la métrica inducida, que llamamos subespacio de (E, d).

En esta sección determinaremos qué condiciones son suficientes y cuáles necesarias para que (F, d) sea completo. Veremos que todo depende de la naturaleza del conjunto F en (E, d).

Antes que nada, vale la pena destacar la siguiente observación, que se deriva del hecho de que la métrica es la misma en ambos espacios y que la definición de sucesión de Cauchy depende sólo de la métrica:

Una sucesión de Cauchy en (E, d) que esté en F, es una sucesión de Cauchy en (F, d). Recíprocamente, una sucesión de Cauchy en (F, d) también lo es en (E, d).

Por otra parte, una sucesión convergente en (F, d) también converge al mismo límite como sucesión de (E, d). Por el contrario, una sucesión convergente en (E, d) que esté en F, converge en (F, d) si y sólo si su límite pertenece a F.

Como consecuencia de estas consideraciones podemos decir que (F, d) es completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy en (E, d) que esté en F, tiene límite en F.

Veremos que los resultados que procedemos a establecer, además de su importancia intrínseca, nos proporcionarán un método sencillo para construir espacios completos e incompletos.

Teorema 1. Si F es compacto, entonces (F, d) es completo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en (F, d). F es SC por ser compacto, luego la sucesión $\{x_n\}$ que está en F, admite una sucesión parcial convergente cuyo límite $x \in F$; pero en virtud del Lema 1 de 5.2, $x_n \to x$. (F, d) es pues, completo. ●

El recíproco del teorema precedente no es, en general, cierto. Por ejemplo, un espacio métrico discreto (E, d) es completo (Ejercicio 24) y si E tiene infinitos puntos, E no es compacto; nótese que (E, d) es un subespacio de sí mismo. Se observa pues que el Teorema 1 establece una condición suficiente pero no necesaria para la completitud del subespacio.

El teorema siguiente, por el contrario, señala una condición necesaria, pero no suficiente.

Teorema 2. Si (F, d) es completo, entonces F es cerrado.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos un $x \in \bar{F}$. En virtud del Corolario 2′ de 5.1, existe una sucesión $\{x_n\}$ en F con $x_n \to x$. Luego, $\{x_n\}$ es una sucesión convergente en (E, d) y, por lo tanto, de Cauchy (Teorema 1 de 5.2); pero como está en F, $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en (F, d), lo cual implica que tiene límite en F, ya que ese espacio es completo por hipótesis. O sea que $x \in F$.

Tenemos pues que $\bar{F} \subset F$, es decir, $F = \bar{F}$.

Este teorema nos permite construir espacios incompletos con toda facilidad. Basta, en efecto, con tomar un conjunto F en (E, d) que no sea cerrado y el espacio (F, d) es incompleto. En éste deben existir sucesiones de Cauchy no convergentes y conjuntos precompactos que no son relativamente compactos.

La existencia de espacios incompletos nos indica que el recíproco del Teorema 2 no es, en general, cierto. De hecho, un espacio incompleto (E, d) siempre puede considerarse como subespacio incompleto de sí mismo. No obstante, E es cerrado en (E, d).

Podemos, sin embargo, establecer un recíproco parcial del Teorema 2, añadiendo la hipótesis de completitud del espacio "grande".

Teorema 3. Si (E, d) es completo y F es cerrado, entonces (F, d) es completo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en (F, d). Luego $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en (E, d) y como éste es completo, $\{x_n\}$ es convergente a un punto $x \in E$. Pero $\{x_n\}$ está en F, lo cual implica, por el Corolario 2′ de 5.1, que $x \in \bar{F}$, o sea que $x \in F$, ya que F es cerrado.

En resumen, $\{x_n\}$ tiene límite en F, es decir, es convergente en (F, d).

Considerando ambos teoremas 2 y 3 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3′. En un espacio completo (E, d), el subespacio (F, d) es completo sí y sólo si F es cerrado.

Además de la importancia intrínseca de los teoremas de esta sección, destacamos que ellos nos permiten, a partir de un espacio métrico dado, construir espacios completos e incompletos con mucha facilidad.

5.4. COMPLETITUD Y PRECOMPACIDAD EN R^n

Particularizamos ahora nuestro estudio a la recta real y al espacio R^n en lo referente a completitud y precompacidad. Se recomienda al lector repasar los Ejemplos 3, 4 y 5 de 1.1.

Naturalmente que todo lo establecido para espacios métricos en general se aplica a R^n. No obstante, tratándose de un caso muy concreto (e importante), es de esperar que posea ciertas propiedades topológicas que no se cumplen para un espacio métrico cualquiera. En esta sección nos proponemos establecer tales propiedades distintivas. Ellas son esencialmente dos: completitud y el que todo conjunto acotado es precompacto. La combinación de ambas trae consecuencias de mucho alcance; entre éstas los famosos teoremas de Bolzano-Weierstrass y Heine-Borel.

Veremos más adelante que todos estos atributos de R^n se generalizan a espacios normados de dimensión finita y, lo que es más, los caracterizan.

Primero demostraremos la completitud de la recta real y de allí obtendremos la de R^n.

Teorema 1. La recta real es un espacio métrico completo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ una sucesión de Cauchy en la recta real y designemos por R_0 su rango. En virtud del Corolario 2', de 5.2, R_0 es un conjunto acotado. Sabemos que esto equivale, en la recta real, a decir que R_0 está acotado superior e inferiormente. Sean pues $a, b \in R$ cotas inferior y superior de R_0, respectivamente. Tenemos entonces,

$$\forall n \in N : a \leq x_n \leq b.$$

Para cada $n \in N$, designemos por R_n al rango de la sucesión $\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$ y construyamos la sucesión $\{y_0, y_1, \cdots, y_n, \cdots\}$ tal que

$$\forall n \in N : y_n = \sup R_n.$$

Nótese que $\forall n \in N : R_{n+1} \subset R_n$, lo cual implica $y_{n+1} \leq y_n$, o sea que la sucesión $\{y_n\}$ es decreciente.

Por otra parte, se deduce de inmediato que $a \leq y_n$, $\forall n \in N$; es decir, el rango de $\{y_n\}$ está acotado inferiormente. Sabemos entonces que $y_n \to z$, donde z es el extremo inferior del rango de $\{y_n\}$.

Nos proponemos demostrar que $x_n \to z$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe un $\nu_1 \in N$ tal que $\forall n, n' \geq \nu_1$:

$$|x_n - x_{n'}| < {}^{\varepsilon}/_{2}. \qquad (1)$$

Ademas, como $z < z + {}^{\varepsilon}/_{2}$, resulta que $z + {}^{\varepsilon}/_{2}$ no puede ser cota inferior del rango de $\{y_n\}$. Debe pues existir algún y_{ν_2} con

$$z \leq y_{\nu_2} < z + {}^{\varepsilon}/_{2}.$$

Sea ahora $\mu = \text{máx}\,\{\nu_1, \nu_2\}$. Como $\mu \geq \nu_2$ y $\{y_n\}$ es decreciente,

$$z \leq y_\mu \leq y_{\nu_2} < z + \varepsilon/2,$$

de donde

$$z - \varepsilon/2 < y_\mu < z + \varepsilon/2.$$

Pero teniendo en cuenta que $y_\mu = \sup R_\mu$, $z - \varepsilon/2$ no puede ser cota superior de R_μ. Debe pues, existir algún $x_\nu \in R_\mu$, para lo cual $\nu \geq \mu$ con

$$z - \varepsilon/2 < x_\nu \leq y_\mu,$$

es decir,

$$z - \varepsilon/2 < x_\nu < z + \varepsilon/2. \qquad (2)$$

Ahora bien, como $\nu \geq \nu_1$, resulta que $\forall n \geq \nu$, ambos $n, \nu \geq \nu_1$ y se aplica (1):

$$|x_n - x_\nu| < \varepsilon/2,$$

lo cual equivale a:

$$x_\nu - \varepsilon/2 < x_n < x_\nu + \varepsilon/2.$$

Pero haciendo uso de (2), obtenemos:

$$z - \varepsilon < x_\nu - \varepsilon/2, \; x_\nu + \varepsilon/2 < z + \varepsilon;$$

de donde

$$\forall n \geq \nu : z - \varepsilon < x_n < z + \varepsilon,$$

desigualdades equivalentes a:

$$|x_n - z| < \varepsilon.$$

Observamos, de paso, aplicando el Corolario 3′ de 5.3 que el subespacio de la recta real costituido por el conjunto Q de los números racionales no es completo, ya que Q no es cerrado por no coincidir con su clausura que es R.

Conviene destacar que el Teorema 1 demuestra la completitud de la recta real como consecuencia de la propiedad del cuerpo de los números reales, según la cual todo conjunto acotado superiormente admite extremo superior.

Pasamos ahora a considerar el espacio R^n y de nuevo referimos al lector al Ejemplo 5 de 1.1.

En todo lo que sigue de esta sección preferimos la notación R^k, a fin de evitar confusión al emplear sucesiones.

Dejamos al lector la sencillísima tarea de demostrar las desigualdades que expresamos a continuación y de las cuales haremos frecuente uso.

Para todo punto (o, si se quiere vector) $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ de R^k se verifican las siguientes desigualdades:

a) $|a_i| \leq ||a|| \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$.

b) $||a|| \leq \sum_{i=1}^{k} |a_i|$.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en R^k; para cada $n \in N$, $x_n \in R^k$ y, por tanto, $x_n = (x_{1n}, x_{2n}, \cdots, x_{kn})$. Se observa pues que $\{x_n\}$ determina k sucesiones reales $\{x_{in}\}$ $(i = 1, \cdots, k)$ que denominaremos *sucesiones coordenadas* de $\{x_n\}$. Veremos en seguida que la sucesión dada y sus sucesiones coordenadas comparten las mismas propiedades.

Podemos definir, de manera quizás más precisa, las sucesiones coordenadas mediante la introducción de las *proyecciones* $pr_i : R^k \to R$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ tales que, para todo $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ de R^k, $pr_i(a) = a_i$. Ahora bien, si $f : N \to R^k$ es una sucesión en R^k, las sucesiones coordenadas son $pr_i \circ f : N \to R$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$.

Lema 1. Una sucesión $\{x_n\}$ en R^k es convergente si y sólo si son convergentes todas sus sucesiones coordenadas $\{x_{in}\}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$.

En tal caso, si $x_{in} \to x_i$ $(i = 1, \cdots, k)$, entonces $x_n \to (x_1, \cdots, x_k)$, y recíprocamente.

Demostración. Supongamos que $x_n \to (x_1, \cdots, x_k)$ y sea $\varepsilon > 0$. Existe un $\nu \in N$ tal que $\forall n \geq \nu : ||x_n - x|| < \varepsilon$, donde

$$x = (x_1, \cdots, x_k).$$

Pero

$$x_n - x = (x_{1n} - x_1, x_{2n} - x_2, \cdots, x_{kn} - x_k),$$

luego, aplicando la desigualdad (a):

$$|x_{in} - x_i| \leq ||x_n - x|| \quad (i = 1, 2, \cdots, k).$$

Tenemos entonces que $\forall n \geq \nu$ y para cada $i = 1, \ldots, k$:

$$|x_{in} - x_i| < \varepsilon,$$

o sea que $x_{in} \to x_i \quad (i = 1, \ldots, k)$.

Recíprocamente, supongamos que $x_{in} \to x_i \quad (i = 1, \ldots, k)$. Luego, si $\varepsilon > 0$, existen $\nu_i \in N$ tales que $\forall n \geq \nu_i$:

$$|x_{in} - x_i| < \varepsilon/k,$$

donde $i = 1, 2, \ldots, k$.

Sea $\nu = \text{máx}\,\{\nu_1, \ldots, \nu_k\}$, entonces $\forall n \geq \nu$ se verifican:

$$|x_{in} - x_i| < \varepsilon/k \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Aplicando ahora la desigualdad (b), $\forall n \geq \nu$:

$$||x_n - x|| \leq \sum_{i=1}^{k} |x_{in} - x_i| < \varepsilon;$$

donde, de nuevo, $x = (x_1, \ldots, x_k)$. O sea que $x_n \to x$.

Estamos ahora en condiciones de demostrar la completitud de R^k con toda facilidad.

Teorema 2. R^k es un espacio completo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en R^k y $\{x_{in}\}$ $(i = 1, \ldots, k)$ sus sucesiones coordenadas.

Dado $\varepsilon > 0$, existe un $\nu \in N$ tal que $\forall n, n' \geq \nu$:

$$||x_n - x_{n'}|| < \varepsilon.$$

Pero

$$x_n - x_{n'} = (x_{1n} - x_{1n'}, x_{2n} - x_{2n'}, \ldots, x_{kn} - x_{kn'}),$$

y aplicando la desigualdad (a),

$$\forall n, n' \geq \nu :$$

$$|x_{in} - x_{in'}| \leq ||x_n - x_{n'}|| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

O sea que las sucesiones coordenadas de $\{x_n\}$ son de Cauchy, lo cual implica, por ser la recta real un espacio completo, que son todas convergentes. En virtud del Lema 1, $\{x_n\}$ es convergente.

Procedemos ahora a estudiar la precompacidad en R^k. Para ello haremos uso transitorio de ciertos conjuntos auxiliares que definimos en seguida.

Tomemos un número real $a > 0$. Llamamos *bloque centrado* y *cerrado* en R^k al conjunto

$$J_a = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_k,$$

donde

$$I_i = [-a, a] \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Expresado de manera equivalente:

$$J_a = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid -a \leq x_i < a, i = 1, \ldots, k\}.$$

Si se trata de la recta real ($k = 1$), J_a no es otra cosa que el intervalo cerrado $[-a, a]$. En R^2 (véase la ilustración) J_a es, geométricamente, un cuadrado de lado $2a$, cuyo centro coincide con el punto $(0, 0)$. En R^3, J_a es un "bloque" rectangular de lados o aristas todos iguales a $2a$ y cuyo centro es el punto $(0, 0, 0)$.

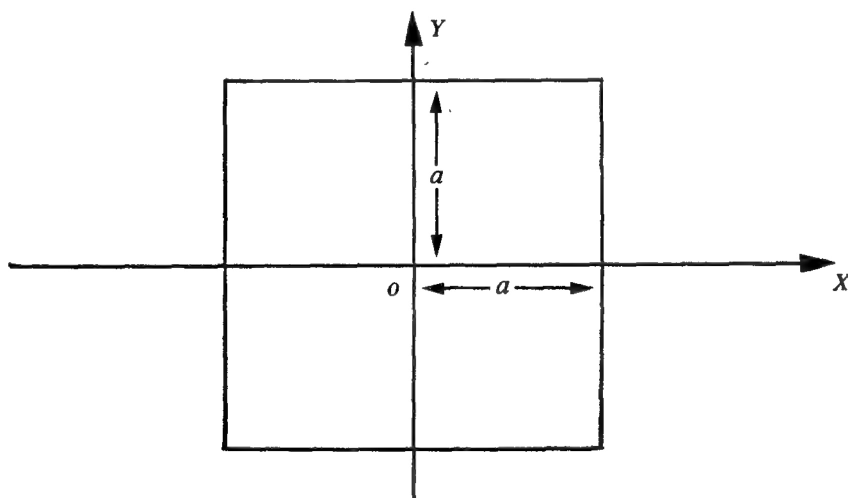


Figura 3. Ilustración geométrica de un bloque centrado y cerrado en R^2

Aun cuando un bloque centrado y cerrado posee propiedades mucho más poderosas, la única que necesitamos ahora es la siguiente (véase el Ejercicio 31).

Lema 2. Todo bloque centrado y cerrado en R^k es precompacto.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el bloque J_a y sea $\varepsilon > 0$. Tomemos un $m \in N$ tal que

$$\frac{2ak}{m} < \varepsilon. \tag{1}$$

Tenemos que $J_a = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_k$, donde $I_i = [-a, a]$, $i = 1, 2, \cdots, k$. Ahora bien, cada intervalo I_i dividámoslo en m partes iguales, es decir, fijemos los puntos

$$-a, -a + \frac{2a}{m}, -a + 2\cdot\frac{2a}{m}, \cdots, -a + m\cdot\frac{2a}{m} = a$$

en cada I_i, obteniendo así una partición de I_i en los m intervalos cerrados:

$$I_i^j = \left[-a + j\frac{2a}{m},\ -a + (j+1)\frac{2a}{m}\right] \quad j = 0, 1, \cdots, m-1.$$

Formamos ahora los m^k productos cartesianos:

$$I_1^{j1} \times I_2^{j2} \times \cdots \times I_k^{jk},$$

donde cada j_i toma los valores $0, 1, \cdots, m-1$. La unión de todos estos conjuntos es evidentemente J_a.

En cada uno elegimos arbitrariamente un punto

$$x \in I_1^{j1} \times \cdots \times I_k^{jk}$$

y consideramos la esfera abierta $N(x; \varepsilon)$.

$x = (x_1, \cdots, x_k)$ y tomemos un $x' = (x_1', \cdots, x_k')$ de $I_1^{j1} \times \cdots \times I_k^{jk}$ cualquiera.

Para cada $i = 1, \cdots, k$:

$$x_i, x_i' \in I_i^{ji} = \left[-a + j_i\frac{2a}{m},\ -a + (j_i + 1)\frac{2a}{m}\right],$$

lo cual implica que

$$|x_i - x'_i| \leq -\cdot\frac{2a}{m}.$$

Ahora bien, aplicando la desigualdad (b) y la (1),

$$||x'-x|| \leq \sum_{i=1}^{k} |x'_i - x_i| \leq \frac{2ak}{m} < \varepsilon.$$

O sea que $x' \in N(x;\varepsilon)$, es decir, $I_1^{j_1} \times \cdots \times I_k^{j_k} \subset N(x;\varepsilon)$. De manera que J_a está contenido en la unión de las m^k esferas $N(x;\varepsilon)$ y es precompacto. ●

Para lograr un mayor entendimiento de la demostración del teorema precedente, la cual, no obstante, carece de dificultad conceptual alguna, se recomienda al lector efectuarla gráficamente en R^2. Nótese que todo se limita a "cuadricular" a J_a con suficiente "finura", luego se encierra cada "cuadrito" en una esfera cuyo centro es cualquiera de sus puntos y radio ε. Tales cuadritos son precisamente los productos $I_1^{j_1} \times \cdots \times I_k^{j_k}$ y todos ellos son cuadrados del mismo lado $\frac{2a}{m}$.

Pasamos ahora a establecer la propiedad topológica resaltante de R^k; es el recíproco del Teorema 1 de 4.2.

Teorema 3. Todo conjunto acotado en R^k es precompacto.

Demostración. Sea A un conjunto acotado en R^k. Tomemos el punto $\theta = (0, 0, \ldots, 0) \in R^k$ y aplicando el Teorema 1 de 4.1, existe un número real $a > 0$ tal que

$$A \subset N(\theta; a).$$

Consideremos el bloque centrado y cerrado J_a y veamos que $N(\theta; a) \subset J_a$. En efecto, tomemos un punto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in N(\theta; a)$ cualquiera y apliquemos la desigualdad (a):

$$|x_i| \leq ||x|| = d(x,\theta) < a \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

lo que equivale a:

$$-a < x_i < a \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

O sea que

$$x \in J_a \text{ y } N(\theta; a) \subset J_a.$$

Se deduce que

$$A \subset J_a;$$

pero por el Lema 2, J_a es precompacto y, en virtud del Teorema 2 de 4.2, A es también precompacto.

En la demostración del teorema anterior, lo que se ha hecho es "circunscribir" un bloque J_a a la esfera $N(\theta; a)$.

Tomando el Teorema 3 junto con el Teorema 1 de 4.2, podemos decir que, en R^k, un conjunto es precompacto, si y sólo si es acotado o, lo que es lo mismo, ser acotado y precompacto son propiedades equivalentes en R^k. Como se expresara anteriormente, este hecho será generalizado más adelante a espacios normados de dimensión finita y servirá además para caracterizarlos.

Luego del Teorema 1 de 4.2 se dio un ejemplo de un espacio métrico discreto en el cual existía un conjunto acotado no precompacto. No obstante, todo espacio discreto es completo, lo cual nos dice que la completitud del espacio no basta para asegurar que todos sus conjuntos acotados sean precompactos.

Mediante la combinación de los Teoremas 2 y 3 obtenemos varios resultados topológicos de gran importancia.

Corolario 3′. Todo conjunto acotado en R^k es relativamente compacto.

DEMOSTRACIÓN. Según el Teorema 3, todo conjunto acotado en R^k es precompacto; pero R^k es un espacio completo, por el Teorema 2, lo cual implica que todo conjunto precompacto es relativamente compacto (Teorema 2 de 5.2).

Teniendo en cuenta que, en cualquier espacio métrico, todo conjunto relativamente compacto es acotado, podemos decir que, en R^k un conjunto es relativamente compacto si y sólo si es acotado.

Corolario 3″ (Heine-Borel). Todo conjunto cerrado y acotado en R^k es compacto.

Se trata de una consecuencia tan inmediata del Corolario 3′ que sobra toda demostración. Recordando los corolarios 1′ y 2′ de 4.3, válidos en todo espacio métrico, podemos decir que un conjunto es compacto en R^k si y

sólo si es cerrado y acotado. Este resultado se dio a conocer antes de la aparición de espacios métricos generales y se atribuye a varios matemáticos ilustres de fines del siglo pasado y principios del actual, entre ellos, además de Heine y Borel, a Lebesgue. Naturalmente que las primeras demostraciones fueron directas, muy elaboradas y complejas, y no guardaban semejanza alguna con el camino que hemos seguido aquí.

También es muy famoso, importante y de la misma época el resultado siguiente.

Corolario 3‴ (Bolzano-Weierstrass). Todo conjunto infinito y acotado en R^k admite algún punto de acumulación.

DEMOSTRACIÓN. Sea A un conjunto infinito y acotado en R^k. En virtud del Corolario 3′, A es relativamente compacto. Su clausura $\bar{A}$ es pues compacta y, por tanto, BW (Teorema 3 de 4.3). Pero A es un subconjunto infinito de $\bar{A}$, luego admite algún punto de acumulación (en $\bar{A}$).

5.5. RESUMEN DE RESULTADOS SOBRE COMPACIDAD

Para este momento se ha establecido una variedad de resultados relacionados directa o indirectamente con el concepto fundamental de compacidad. Algunos son válidos en todo espacio métrico, para otros se requiere que el espacio sea compacto y algunas implicaciones sólo se verifican en R^n. Consideramos oportuno mostrar ahora un resumen de todos esos resultados y de manera tal, que pueda servir de cómoda referencia.

Hemos elegido la modalidad de un cuadro de implicaciones. En la primera fila horizontal se listan diez propiedades que puede poseer un conjunto en un espacio métrico y esa lista se repite, en el mismo orden, en la primera columna vertical.

La manera de utilizar el cuadro es la siguiente: Supongamos que queremos averiguar si en un espacio métrico, todo conjunto con la propiedad A posee la propiedad B, donde A y B figuran entre los diez conceptos listados. Es decir, se desea saber si la posesión, por parte de un conjunto, de la propiedad A implica la posesión de la B. Localizamos A en la primera fila horizontal y B en la primera columna vertical. Luego hallamos el cuadrado donde se intersectan la columna encabezada por A con la fila que comienza con B; es decir, el cuadrado de "coordenadas A, B". En ese cuadrado aparecerá uno de cuatro símbolos:

V significa que $A \Longrightarrow B$ en todo espacio métrico.

C significa que $A \Longrightarrow B$ en todo espacio métrico *completo*; pero la implicación no es, en general, cierta en un espacio incompleto.

R^n indica que $A \Longrightarrow B$ en R^n; pero no es siempre cierto en un espacio cualquiera, aun siendo completo.

X significa que no todo conjunto con la propiedad A posee la B, ni siquiera en R^n, mucho menos en un espacio cualquiera, aún siendo completo.

Asi pues, utilizando la tabla de la manera descrita, observamos que todo conjunto precompacto es acotado en cualquier espacio métrico (Teorema 1 de 4.2). Análogamente, vemos que en un espacio completo todo conjunto precompacto es relativamente compacto (Teorema 2 de 5.2) y, como consecuencia del Teorema 3 de 5.2, sabemos que ello no es cierto en espacios incompletos.

Notamos que, en R^n, todo conjunto acotado es precompacto (Teorema 3 de 5.4); pero conocemos un ejemplo de conjunto acotado no precompacto en un espacio que por cierto, es completo.

$\Downarrow$	Comp.	*BW*	*SC*	R. Comp. & Cerrado	Relat. Comp.	Prec. & Cerrado	Precomp.	Cerrado & Acotado	Cerrado	Acotado
Comp.	V	V	V	V	X	C	X	R^n	X	X
BW	V	V	V	V	X	C	X	R^n	X	X
SC	V	V	V	V	X	C	X	R^n	X	X
R. Comp. & Cerrado	V	V	V	V	X	C	X	R^n	X	X
Relat. Comp.	V	V	V	V	V	C	C	R^n	X	R^n
Prec. & Cerrado	V	V	V	V	X	V	X	R^n	X	X
Precomp.	V	V	V	V	V	V	V	R^n	X	R^n
Cerrado & Acotado	V	V	V	V	X	V	X	V	X	X
Cerrado	V	V	V	V	X	V	X	V	V	X
Acotado	V	V	V	V	V	V	V	V	X	V

Finalmente, para ilustrar el significado del símbolo X, observamos que no todo conjunto acotado es cerrado. Es muy sencillo proporcionar un ejemplo en R^n.

Se incita al lector, como ejercitación y repaso, a verificar la validez de las cien implicaciones del cuadro. Según el caso, se hará referencia a un teorema del texto o podrá deducirse de varios de ellos; con mayor frecuencia será necesario mostrar contraejemplos adecuados.

Más adelante veremos que R^n puede substituirse por espacio normado de dimensión finita.

5.6. TEOREMAS DE CANTOR Y BAIRE

En esta sección penetramos más profundamente en la naturaleza de los espacios métricos completos mediante la demostración de dos famosos teoremas, cuyas consecuencias son de largo alcance. Uno se atribuye a Cantor y el otro a Baire.

El Teorema 1, frecuentemente llamado "Teorema de Intersección de Cantor", proporciona una nueva caracterización de los espacios completos. Con objeto de abreviar su enunciado, conviene introducir antes una definición.

Se dice que un espacio métrico posee la *propiedad de Cantor*, si toda familia contable de conjuntos $\{A_0, A_1, \cdots\}$, cada uno cerrado y no vacío, $\forall n \in N : A_{n+1} \subset A_n$ e $\inf \{\delta(A_n)\} = 0$, tiene intersección no vacía.

Nótese primeramente que de $A_{n+1} \subset A_n$ deducimos $\delta(A_{n+1}) \leq \delta(A_n)$, o sea que la sucesión real

$$\{\delta(A_0), \delta(A_1), \cdots, \delta(A_n), \cdots\}$$

es decreciente, lo cual implica que $\delta(A_n) \to \inf \{\delta(A_n)\} = 0$.

Por otra parte, si designamos por $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$, se tiene que $A \subset A_n$, $\forall n \in N$, de donde $\delta(A) \leq \delta(A_n)$, implicando $\delta(A) \leq \inf \{\delta(A_n)\} = 0$; pero como un diámetro no puede ser negativo, resulta $\delta(A) = 0$. Luego, como $A \neq \phi$, A está constituido por un solo punto (4.1).

Teorema 1 (Cantor). Un espacio métrico es completo si y sólo si posee la propiedad de Cantor.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el espacio (E, d) es completo y sea $\{A_0, A_1, \cdots\}$ una familia contable de conjuntos cerrados y no vacíos,

$$\forall n \in N : A_{n+1} \subset A_n \text{ e } \inf \{\delta(A_n)\} = 0.$$

Construyamos una sucesión $\{x_n\}$ en (E, d) tomando arbitrariamente un punto $x_n \in A_n$, para cada $n \in N$, aprovechando que $A_n \neq \phi$.

Veamos que $\{x_n\}$ es de Cauchy. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, éste no puede ser cota inferior del conjunto $\{\delta(A_n)\}$, lo cual implica que, para algún A_ν, $\delta(A_\nu) < \varepsilon$. Ahora bien, $\forall n, n' \geq \nu$, $A_n \subset A_\nu$ y $A_{n'} \subset A_\nu$, de donde $x_n, x_{n'} \in A_\nu$, lo cual implica

$$d(x_n, x_{n'}) \leq \delta(A_\nu) < \varepsilon.$$

Como el espacio es completo, $x_n \to x$.

Tomemos un A_m cualquiera. Por construcción, la sucesión $\{x_m, x_{m+1}, \cdots\}$ está en A_m y es parcial de la $\{x_n\}$, lo cual implica (Teorema 3 de 5.1) que también converge a x. Pero entonces, en virtud del Corolario 2′ de 5.1, x es punto de adherencia de A_m y como éste es cerrado, $x \in A_m$.

De manera que $x \in A_m$, $\forall m \in N$, es decir $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ y dicha intersección no es vacía.

Recíprocamente, supongamos que el espacio posee la propiedad de Cantor y sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy.

Consideremos la familia contable de conjuntos $\{A_0, A_1, \cdots\}$ tal que $\forall n \in N : A_n$ es el rango de la sucesión $\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$. Evidentemente que ningún A_n es vecío y que $A_{n+1} \subset A_n$, $\forall n \in N$. Además, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\nu \in N$ tal que $\forall n, n' \geq \nu : d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon$; pero, por construcción, si $x_n, x_{n'} \in A_\nu$ entonces $n, n' \geq \nu$, de donde $d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon$, lo cual implica $\delta(A_\nu) \leq \varepsilon$. Se deduce pues que inf $\{\delta(A_n)\} = 0$.

Tomemos ahora la familia contable de las clausuras $\{\bar{A}_0, \bar{A}_1, \cdots\}$. Resulta entonces que cada $\bar{A}_n$ es cerrado y no vacío, $\bar{A}_{n+1} \subset \bar{A}_n$, $\forall n \in N$ y, como $\delta(\bar{A}_n) = \delta(A_n)$ (Lema 1 de 4.1), también inf $\{\delta(\bar{A}_n)\} = 0$.

Luego, por hipótesis, existe un punto (único)

$$x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n.$$

Ahora bien, dado $\varepsilon > 0$, debe existir $\bar{A}_\nu$ con $\delta(\bar{A}_\nu) < \varepsilon$. Pero $x \in \bar{A}_\nu$ y, por construcción, $\forall n \geq \nu : x_n \in A_\nu \subset \bar{A}_\nu$; luego $d(x_n, x) \leq \delta(\bar{A}_\nu) < \varepsilon$.

O sea que $x_n \to x$ y (E, d) es completo.

Son muchas las situaciones en las que conviene hacer uso del teorema precedente. Por lo general se sabe que el espacio es completo y se emplea la propiedad de Cantor para demostrar algunas tesis. Muy rara vez se utiliza la propiedad de Cantor para probar la completitud del espacio. No obstante, lo hemos hecho aquí para poner de manifiesto que sólo los espa-

cios completos poseen dicha propiedad y evitar así las interrogantes sin respuesta.

Una hermosa y profunda aplicación del Teorema 1 la constituye el famoso resultado de Baire, cuyas consecuencias son muy ricas y aparecen en las teorías matemáticas más diversas y avanzadas. Teoremas fundamentales del Análisis Funcional, tales como el de la transformación abierta, de Banach-Steinhaus y otros, dependen del Teorema de Baire. También se aplica para demostrar la existencia de funciones continuas en un intervalo y que carecen de derivada en todos sus puntos.

En el Teorema 3 de 2.7 se estableció que la unión de un número finito de conjuntos nada-densos es un conjunto nada-denso (por tanto, fronterizo, en virtud de P_5 de 2.7); pero nada pudo asegurarse si se trataba de un número infinito de ellos. El teorema siguiente (Baire) responde parcialmente la pregunta. Antes conviene adoptar nueva terminología que abrevie la cuestión.

Se dice que un conjunto en un espacio métrico es *magro* (también llamado de *primera categoría*), si es la unión en una familia contable de conjuntos nada-densos. Un conjunto que no es magro suele llamarse de *segunda categoría.*

Es oportuno destacar que una esfera cerrada cualquiera $\bar{N}(x;r)$ no es un conjunto fronterizo, ya que siempre

$$N(x;r) \subset \bar{N}(x;r),$$

lo cual implica que x es un punto interior de $\bar{N}(x;r)$. El interior de la esfera cerrada no es, pues, vacío y ésta no puede ser fronteriza, por P_6 de 2.7.

Conviene tener presente otro hecho. Sea A un conjunto no fronterizo y $\varepsilon > 0$, entonces existe una esfera cerrada de radio menor que ε contenida en A. En efecto, tomemos un $x \in \mathring{A}$ (P_6 de 2.7), luego existe un $r > 0$ tal que $N(x;r) \subset A$. Elijamos ahora un número real r_1, con $0 < r_1 < \text{mín}\{r, \varepsilon\}$; entonces, como $r_1 < r$,

$$\bar{N}(x;r_1) \subset N(x;r) \subset A$$

y, además, $r_1 < \varepsilon$.

Finalmente, sugerimos al lector mirar de nuevo el Lema 2 de 2.7 que será utilizado reiteradamente en la demostración que sigue.

Teorema 2 (Baire). Todo conjunto magro en un espacio métrico completo es fronterizo.

DEMOSTRACIÓN. En el transcurso de la prueba emplearemos la letra C para designar una esfera cerrada, colocando subíndices para distinguir una de otra.

Sea A un conjunto magro que supondremos no vacío, de lo contrario es fronterizo trivialmente. Luego,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

donde cada A_n es nada-denso.

Tomemos un conjunto cualquiera S abierto y no vacío. Existe una esfera cerrada C con $C \subset S$.

Como A_1 es nada-denso y C no es fronterizo, el Lema 2 de 2.7 implica que $C-A$ no es fronterizo; luego existe una esfera cerrada C_1 con $C_1 \subset C-A_1$, cuyo radio es menor que $\frac{1}{2}$, de donde $\delta(C_1) \leq 1$.

Procediendo por inducción, supongamos construidas las esferas cerradas $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$, tales que para $i = 1, 2, \cdots, n-2$:

$$C_{i+1} \subset C_i - A_{i+1} \text{ y } \delta(C_i) \leq {}^1/_i.$$

Aplicando de nuevo el Lema 2 de 2.7, $C_{n-1} - A_n$ no es fronterizo; luego existe una esfera cerrada C_n con $C_n \subset C_{n-1} - A_n$, cuyo radio es menor que ${}^1/_{2n}$, o sea que $\delta(C_n) \leq {}^1/_n$.

En virtud del principio de inducción hemos construido una familia contable $\{C_1, C_2, \cdots\}$ de esferas cerradas tales que $\forall n \in N : C_{n+1} \subset C_n - A_{n+1}$, de donde $C_{n+1} \subset C_n$.

Además, $\delta(C_n) \leq {}^1/_n$, lo cual se ve fácilmente que implica

$$\inf \{\delta(C_n)\} = 0.$$

Aplicando entonces el Teorema 1, sabiendo que el espacio es completo, debe existir algún punto (único)

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

De aquí se deduce:

(1) $x \in C_1 \subset C - A_1$, es decir, $x \in C$, o sea, $x \in S$.
(2) $\forall n \in N : x_n \in C_n \subset C_{n-1} - A_n$, de donde $x \notin A_n$, $\forall n \in N$.

Es decir, $x \notin A$.

(1) y (2) implican que $x \in S-A$, de manera que S no está contenido en A. En resumen, A no contiene conjuntos abiertos no vacíos, o sea que $\mathring{A} = \phi$ y A es fronterizo, por P_6 de 2.7.

La colección de corolarios del Teorema 2 que enunciamos a continuación no es otra cosa que maneras equivalentes de expresar el teorema de Baire. No obstante, conviene destacar todas las formas en que se aplica.

Corolario 1. Si el espacio (E, d) es completo, entonces E es de segunda categoría (no es magro).

DEMOSTRACIÓN. Si E fuese magro, E sería fronterizo de acuerdo con el Teorema 2, pero eso no es posible, por P_2 de 2.7.

Podemos obtener un resultado más general aún, que incluye al Corolario 1 como caso particular.

Corolario 2. Todo conjunto abierto y no vacío, en un espacio completo, es de segunda categoría.

DEMOSTRACIÓN. Si el conjunto abierto fuese magro, sería fronterizo por el Teorema 2, pero ello implicaría, en virtud de P_7 de 2.7, que el conjunto es vacío.

Corolario 3. Si (E, d) es completo y $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, entonces $\mathring{A}_n \neq \phi$ para algún $n \in N$.

DEMOSTRACIÓN. $\mathring{A}_n = \phi$ es equivalente a que A_n es nada-denso (P_8 de 2.7) y, si esto sucede para todo $n \in N$, E es magro, lo cual contradice lo establecido en el Corolario 1.

Corolario 4. Si $\{A_1, A_2, \cdots\}$ es una familia contable de conjuntos nada-densos en un espacio completo (E, d), entonces

$$E - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \neq \phi.$$

DEMOSTRACIÓN. $E - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \phi$ implica $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, o sea que E es magro, contradiciendo lo establecido en el Corolario 1.

Este último Corolario es de frecuente utilidad; nótese que generaliza el Ejercicio 22 del Capítulo II.

Corolario 5. Si $\{B_1, B_2, \cdots\}$ es una familia contable de conjuntos abiertos y densos en un espacio completo (E, d), entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ es denso.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la familia contable de conjuntos $\{A_1, A_2, \cdots\}$ tal que $\forall n \in N : A_n = E - B_n$.

Cada A_n es entonces cerrado y fronterizo (su complemento B_n es abierto y denso), lo cual implica (P_4 de 2.7), que es nada-denso. Luego

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

es magro y, en virtud del Teorema 2, fronterizo.

Su complemento

$$E - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E - A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

es, por lo tanto, denso.

El siguiente resultado constituye una hermosa aplicación del teorema de Baire. Recuérdese (2.4) que un conjunto perfecto es aquel que coincide con su derivado, es decir que es cerrado y todos sus puntos son de acumulación.

Teorema 3. Un conjunto perfecto A en un espacio (E, d), tal que el subespacio (A, d) es completo, no es contable.

DEMOSTRACIÓN. En virtud del Corolario 1, A es de segunda categoría en (A, d).

Tomemos un punto $x \in A$ cualquiera y consideremos el conjunto $B = \{x\}$ constituido únicamente por x. Nótese que $x \in A' = A$; luego, para todo número real $r > 0$, $A \cap N(x; r)$ contiene infinitos puntos distintos de x y es una esfera abierta en (A, d) (2.6). De manera que no existe esfera abierta (en (A, d)) de centro x contenida en B, es decir, x no es punto interior de B, lo cual implica que $\mathring{B} = \phi$ (en (A, d)), o sea que B es fronterizo (P_6 de 2.7) y, además, cerrado, por contener un solo punto. Se deduce que B es nada-denso (P_4 de 2.7).

En resumen, todo conjunto constituido por un solo punto de A es nada-denso en el espacio completo (A, d).

Ahora bien, siempre podemos expresar

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\},$$

o sea que si A es contable, A es magro, lo cual es una contradicción. ●

Corolario 3'. Un conjunto perfecto y compacto en cualquier espacio métrico no es contable.

DEMOSTRACIÓN. En virtud del Teorema 1 de 5.3, el subespacio constituido por el conjunto compacto es completo. ●

Corolario 3''. Un conjunto perfecto en un espacio métrico completo no es contable.

DEMOSTRACIÓN. Como el conjunto es cerrado, por ser perfecto, constituye un subespacio completo, en virtud del Teorema 3 de 5.3. ●

En particular, si un espacio (E, d) es completo y no contiene puntos aislados, E no es contable. Tal es el caso de la recta real, como se comprueba fácilmente, de donde se deduce que el conjunto R de los números reales no es contable. Existen diversas demostraciones de este hecho; la más conocida se apoya en la representación decimal de los números reales. La dada aquí es, sin duda, particularmente elegante, y es consecuencia del teorema de Baire, cuyo carácter es decididamente topológico.

Más general, se verifica con facilidad que un intervalo cerrado de extremos no coincidentes es un conjunto perfecto en la recta real, se concluye entonces, por el corolario 3'', que no es contable.

Como consecuencia, cualquier intervalo de extremos no coincidentes no es contable, ya que contiene intervalos cerrados.

5.7. LIMITES FUNCIONALES

Procedemos a establecer y desarrollar el importante concepto de límite de una función en un punto. Preferimos presentar primero la definición precisa y luego interpretarla intuitivamente.

Sean (E, d) y (F, d') espacios métricos cualesquiera (iguales o distintos) y A un subconjunto de E. Consideremos una función $f : A \subset E \to F$ y un punto $a \in E$ de acumulación de A, es decir, $a \in A'$.

Se dice que un punto $b \in F$ *es límite de f en a* y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Si a todo entorno T de b corresponde un entorno S de a tal que

$$f[(S - \{a\}) \cap A] \subset T,$$

es decir, $\forall x \in (S - \{a\}) \cap A : f(x) \in T$.

También se dice que *b es el límite de f cuando x tiende a a.*

Al punto a, que no tiene que pertenecer al dominio A de f, se le exige que sea punto de acumulación de A con objeto de que el conjunto $(S - \{a\}) \cap A$ no resulte vacío, cualquiera que sea el entorno S de a.

Pronto demostraremos que, de existir el límite b de f en el punto a, éste es único.

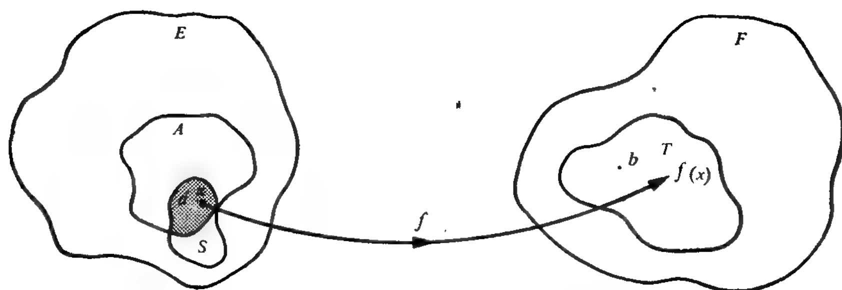


Figura 4. Ilustración de la definición del límite: las imágenes de todos los puntos de la región sombreada están en T, con la posible excepción de la imagen de a.

Nótese que, aun cuando $a \in A$, la imagen $f(a)$ no interviene en la definición y puede muy bien diferir del límite b.

Recordemos que, intuitivamente, el concepto de entorno traduce la idea de cercanía o proximidad al punto en cuestión. Así pues, la definición de que b es el límite de f en a significa que $f(x)$ puede estar tan próximo a b como se desee, con sólo tomar x suficientemente cerca de a.

Quizás el ejemplo más sencillo que puede presentarse es el de una función constante $f : A \subset E \to F$, donde $\forall x \in A : f(x) = c$, para un mismo $c \in F$ fijo. En este caso, para cualquier $a \in A'$, $\lim_{x \to a} f(x) = c$. En efecto, si T es un entorno de c, tomemos cualquier entorno S de a. En virtud de la definición de f, $\forall x \in (S - \{a\}) \cap A : f(x) = c \in T$. Se nota que cualquier

entorno S de a, da el resultado deseado, con independencia del entorno T de c. En general, no es de esperar que esto suceda; S dependerá de T.

Volvamos al caso general de una función $f : A \subset E \to F$ y $a \in A'$. Supongamos que $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

Ahora bien, dado un número real $\varepsilon > 0$, la esfera abierta $N(b; \varepsilon)$ es un entorno de b. Existe entonces un entorno S de a tal que

$$f[(S - \{a\}) \cap A] \subset N(b; \varepsilon).$$

Pero existe un $\delta > 0$ tal que $N(a; \delta) \subset S$, de donde

$$A \cap N^1(a; \delta) \subset (S - \{a\}) \cap A,$$

lo cual implica

$$f[A \cap N^1(a; \delta)] \subset N(b; \varepsilon),$$

que es equivalente a

$$\forall x \in A \text{ con } 0 < d(x, a) < \delta : d'(f(x), b) < \varepsilon.$$

Recíprocamente, supongamos que a cada $\varepsilon > 0$ corresponde un $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in A \text{ con } 0 < d(x, a) < \delta : d'(f(x), b) < \varepsilon. \qquad (1)$$

Sea T un entorno cualquiera de b. Debe existir un $\varepsilon > 0$ tal que $N(b; \varepsilon) \subset T$. Por hipótesis, a ε corresponde un $\delta > 0$, cumpliéndose la propiedad (1); pero ésta equivale a

$$\forall x \in A \cap N^1(a; \delta) : f(x) \in N(b; \varepsilon),$$

de donde se deduce

$$f[A \cap N^1(a; \delta)] \subset T,$$

siendo $N(a; \delta)$ un entorno de a.

Resulta pues, que $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

En resumen, hemos obtenido la siguiente definición equivalente que tendrá apariencia más familiar para algunos lectores:

b es límite de *f* en el punto $a \in A'$, si a cada $\varepsilon > 0$ corresponde un $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in A \text{ con } 0 < d(x,a) < \delta : d'(f(x), b) < \varepsilon.$$

En adelante emplearemos una u otra definición según convenga.

Pasamos ahora a demostrar la unicidad del límite cuando éste existe. Es decir, si b es límite de f en el punto a, no existe otro punto en el espacio (F, d'), distinto de b, que también satisfaga la definición.

Teorema 1. Sea $f : A \subset E \to F$ y $a \in A'$. Si existe un punto $b \in F$ tal que $\lim_{x \to a} f(x) = b$, éste es único.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe un $b' \in F$ con $b' \neq b$, que también satisface la definición del límite de f en a.

Aplicando el Lema 1 de 4.3, existe un entorno T_1 de b y un entorno T_2 de b' tales que

$$T_1 \cap T_2 = \phi. \tag{1}$$

Ahora bien, a T_1 corresponde un entorno S_1 de a con

$$f[(S_1 - \{a\}) \cap A] \subset T_1$$

y a T_2 corresponde un entorno S_2 de a con

$$f[(S_2 - \{a\}) \cap A] \subset T_2.$$

Por otra parte, $S = S_1 \cap S_2$ es un entorno de a (2.3) y $(S - \{a\}) \cap A$ está contenido en $(S_1 - \{a\}) \cap A$ y en $(S_2 - \{a\}) \cap A$, lo cual implica

$$f[(S - \{a\}) \cap A] \subset T_1 \cap T_2;$$

pero $(S - \{a\}) \cap A \neq \phi$, ya que $a \in A'$ y obtenemos una contradicción de (1).

El teorema que sigue es de gran importancia y haremos frecuente uso de él. Establece una relación interesante, de doble implicación, entre el límite de una función en un punto y sucesiones convergentes. Para entenderlo correctamente es preciso tener presente el Teorema 2 de 5.1 junto con la observación que sigue a su demostración.

Teorema 2. Sea $f : A \subset E \to F$ y $a \in A'$.

1. Si existe $\lim_{x \to a} f(x) = b$, entonces, para toda sucesión $\{x_n\}$ en A, tal que $x_n \to a$, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a b

2. Si para toda sucesión $\{x_n\}$ en A, con $x_n \to a$, $\{f(x_n)\}$ es convergente, entonces todas ellas convergen al mismo punto b y el límite de f en a existe y es igual a b.

DEMOSTRACIÓN.

1. Aplicando el Teorema 2 de 5.1, consideremos una sucesión $\{x_n\}$ en A, cuyos términos sean todos distintos de a y $x_n \to a$. Tomemos un entorno cualquiera T de b. Como $\lim_{x \to a} f(x) = b$, existe un entorno S de a tal que

$$\forall x \in (S - \{a\}) \cap A : f(x) \in T. \qquad (1)$$

Ahora bien, como $x_n \to a$, al entorno S de a corresponde un $\nu \in N$ tal que

$$\forall n \geq \nu : x_n \in S;$$

pero ya que la sucesión está en A y todos sus términos son distintos de a,

$$\forall n \geq \nu : x_n \in (S - \{a\}) \cap A,$$

lo cual implica, en virtud de (1), que

$$\forall n \geq \nu : f(x_n) \in T,$$

o sea que $f(x_n) \to b$.

2. Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sucesiones en A, ambas convergentes al punto a. Por hipótesis existen $\lim f(x_n) = p$, $\lim f(y_n) = q$. Se desea demostrar que $p = q$. Con tal fin, consideremos la sucesión en A $\{x_0, y_0, x_1, y_1, \cdots\}$ la cual, evidentemente, converge al punto a; ello implica, de nuevo por hipótesis, que la sucesión $\{f(x_0), f(y_0), f(x_1), f(y_1), \cdots\}$ converge a algún punto z; pero las sucesiones $\{f(x_n)\}$, $\{f(y_n)\}$ son parciales de aquella y, por el Teorema 3 de 5.1, tienen el mismo límite z. Luego, en virtud de la unicidad del límite de una sucesión $p = q = z$.

Designemos por b al límite común de todas las sucesiones $\{f(x_n)\}$, cuyos términos son las imágenes de los de sucesiones $\{x_n\}$ en A con $x_n \to a$. Supongamos que no es cierto que $\lim f(x) = b$. Entonces debe existir

algún entorno T de b tal que para todo entorno S de a existe siempre un punto

$$x \in (S - \{a\}) \cap A \text{ con } f(x) \notin T.$$

Podemos construir una sucesión $\{x_n\}$ en A tal que para cada número natural $n \geq 1$ elegimos

$$x_n \in A \cap N^1(a; {}^1/_n) \text{ con } f(x_n) \notin T.$$

Es inmediato que $x_n \to a$, ya que siempre $d(x_n, a) < {}^1/_n$; pero no es cierto que $f(x_n) \to b$, contradiciendo lo establecido anteriormente.

Concluimos que necesariamente $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Si $f : A \subset E \to F$, $a \in A'$ y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, no podemos asegurar que b pertenezca al rango $f(A)$ de f, mucho menos que $b = f(a)$, aun cuando $a \in A$; pero si se puede afirmar que b "no está lejos de $f(A)$". En efecto y de manera precisa, dado un entorno T de b, existe un entorno S de a tal que

$$\forall x \in (S - \{a\}) \cap A : f(x) \in T$$

pero $f(x) \in f(A)$ trivialmente, luego $T \cap f(A) \neq \phi$, lo cual implica, por el Teorema 2 de 2.4, que

$$b \in \overline{f(A)}$$

y es equivalente, por el mismo teorema citado, a $d'(b, f(A)) = 0$.

Hemos visto que, intuitivamente, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ significa que $f(x)$ puede aproximarse tanto a b como se quiera con sólo tomar x suficientemente próximo al punto a. Esto hace suponer que imágenes $f(x)$, $f(y)$ deben estar muy cerca una de la otra, por estar ambas bastante próximas a b, si x, y se hallan adecuadamente cercanos de a. Tal intuición es correcta, como veremos en seguida.

Teorema 3. Si $f : A \subset E \to F$, $a \in A'$ y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, entonces a cada $\varepsilon > 0$ corresponde un entorno S de a tal que

$$\forall x, y \in (S - \{a\}) \cap A : d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos la esfera abierta $N(b; {}^\varepsilon/_2)$ que es un entorno de b. Existe entonces un entorno S de a tal que

$$f[(S-\{a\})\cap A]\subset N(b;\varepsilon/2).$$

Luego,

$$\forall x,y\in(S-\{a\})\cap A: f(x),f(y)\in N(b;\varepsilon/2),$$

lo cual implica

$$d'(f(x),f(y))\leq d'(f(x),b)+d'(f(y),b)<\varepsilon.$$

Ocurre preguntarse la validez del recíproco del teorema precedente. Si las imágenes $f(x)$, $f(y)$ se acercan una a otra tanto como se quiera, con sólo tomar x,y suficientemente próximos al punto a, cabe sospechar que ello se debe a que se están aproximando a un cierto punto (el límite). Lamentablemente, esta vez no sucede lo propio en el caso general. No obstante, si se exige que el espacio co-dominio (F,d') sea completo, entonces nuestra intuición es verificable. Estas consideraciones son muy similares a las que se hicieron en 5.2, en torno a la convergencia de sucesiones de Cauchy, y la semejanza no es incidental, como podrá observarse en la demostración del teorema siguiente.

Teorema 4. Sean $f: A\subset E\to F$, (F,d') completo, $a\in A'$.
Si a cada $\varepsilon>0$ corresponde un entorno S de a tal que

$$\forall x,y\in(S-\{a\})\cap A: d'(f(x),f(y))<\varepsilon,$$

entonces existe el límite de f en el punto a.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en A, cuyos términos son todos distintos de a y tal que $x_n\to a$. Dado $\varepsilon>0$, existe, por hipótesis, un entorno S de a tal que

$$\forall x,y\in(S-\{a\})\cap A: d'(f(x),f(y))<\varepsilon. \tag{1}$$

Ahora bien, como $x_n\to a$, al entorno S de a corresponde un $\nu\in N$ tal que $\forall n\geq\nu: x_n\in S$; pero la sucesión $\{x_n\}$ está en A y todos sus términos son distintos del punto a, luego

$$\forall n\geq\nu: x_n\in(S-\{a\})\cap A.$$

De allí que

$$\forall n,n'\geq\nu: x_n,x_{n'}\in(S-\{a\})\cap A,$$

o sea que, por (1), $d'(f(x_n),f(x_{n'}))<\varepsilon$.

De manera que la sucesión $\{f(x_n)\}$ es de Cauchy y, como el espacio (F, d') es completo, converge.

En virtud de la proposición 2 del Teorema 2, existe el límite de f en el punto a.

La utilidad del teorema precedente, como el caso de sucesiones de Cauchy en un espacio completo, reside en que permite determinar la existencia del límite sin conocerlo previamente.

Los Teoremas 3 y 4 admiten un enunciado conjunto que puede considerarse como un criterio general de convergencia funcional; suele atribuirse a Cauchy.

Sean $f : A \subset E \to F$, (F, d') completo, $a \in A'$. f tiene límite en a si y sólo si a cada $\varepsilon > 0$ corresponde un entorno S de a tal que

$$\forall x, y \in (S - \{a\}) \cap A : d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Nótese que, haciendo uso del concepto de diámetro de un conjunto, la condición puede expresarse más abreviadamente como

$$\delta(f[(S - \{a\}) \cap A]) \leq \varepsilon;$$

aunque no puede decirse que gana en sencillez.

EJERCICIOS

1. Demostrar que si se suprime de la sucesión $\{x_n\}$ un conjunto finito y arbitrario de sus términos y se conservan los restantes en el mismo orden relativo, se obtiene una sucesión parcial de $\{x_n\}$.

2. ¿Establece el concepto de sucesión parcial una relación de orden sobre el conjunto de todas las sucesiones en un conjunto no vacío X? Justifíquese la respuesta.

3. ¿Establece el concepto de reordenación de términos una relación de equivalencia sobre el conjunto de todas las sucesiones en un conjunto no vacío X?

4. $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ son sucesiones, en un espacio métrico, tales que el conjunto $\{n \in N \mid x_n \neq y_n\}$ es finito. Demostrar que ambas convergen al mismo límite o ambas carecen de límite.

5. Demostrar que, si $x_n \to x$ y A es el rango de $\{x_n\}$, el conjunto $A \cup \{x\}$ es compacto.

(*Sugerencia*: Aplíquense directamente las definiciones de compacidad y límite.)

6. Demostrar que el rango de una sucesión convergente es relativamente compacto.
   Dar un contraejemplo que revele que el recíproco no es cierto.

7. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio cualquiera (E, d). Supongamos que:

   a) el rango A de $\{x_n\}$ es relativamente compacto y admite un único punto de acumulación $z \in E$.
   b) para cada $x \in A$ el conjunto $\{n \in N \mid x_n = x\}$ es finito.

   Demostrar que $x_n \to z$.
   Probar que si $\{x_n\}$ es convergente y su rango es infinito, se cumple (a).
   Dar un ejemplo de sucesión $\{x_n\}$ en el cual se cumple (a) y no (b), pero $x_n \to z$, y otro donde $\{x_n\}$ no converge.

8. Sea $\{x_n\}$ una sucesión real que tiene límite x.
   Probar que si $y < x$, entonces existe un $\nu \in N$ tal que $\forall n \geq \nu$: $y < x_n$.

9. Sea $\{x_n\}$ una sucesión real que tiene límite distinto de cero. Demostrar que existe un $\nu \in N$ tal que $\forall n \geq \nu$: x_n tiene el mismo signo que el límite.

10. En la recta real, $x_n \to x$, $y_n \to y$, $x < y$. Demostrar que existe un $\nu \in N$ tal que $\forall n \geq \nu$: $x_n < y_n$.

11. En la recta real, $x_n \to x$, $y_n \to y$, $\forall n \in N$: $x_n < y_n$. Probar que $x \leq y$
    Dar un ejemplo en el cual $x = y$.

12. $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ son sucesiones en un espacio métrico.
    Probar las siguientes implicaciones:

    a) $x_n \to x, d(x_n, y_n) \to 0 \implies y_n \to x$.
    b) $x_n \to x, y_n \to x \implies d(x_n, y_n) \to 0$.

13. Demostrar que todo número real es el límite de una sucesión de términos racionales.
    (*Sugerencia*: Corolario 2′ de 5.1.)

14. Probar que una sucesión, cuyo rango es relativamente compacto, admite una sucesión parcial convergente.

15. $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ son sucesiones reales tales que:

a) $\forall n \in N : x_n \leq y_n \leq z_n$.
b) $\text{lím } x_n = \text{lím } z_n = x$.

Probar que $\{y_n\}$ converge y su límite es x.

16. Se dice que una sucesión real $\{x_n\}$ es *divergente* si a cada $k > 0$ corresponde un $\nu \in N$ tal que $\forall n \geq \nu : |x_n| > k$.
En símbolos: $x_n \to \infty$.

b) Pruébese que una sucesión divergente no puede ser convergente.
a) Proporciónese un ejemplo de sucesión real que no es convergente ni divergente.

17. Probar que una sucesión real creciente, cuyo rango no está acotado superiormente, es divergente.

18. Si A es un conjunto no acotado en la recta real, demuéstrese que existen sucesiones divergentes en A.

19. Demostrar que una sucesión real, cuyo rango no es acotado, admite una sucesión parcial divergente.

20. Demostrar que toda sucesión parcial de una sucesión divergente es divergente.

21. Demostrar que, si toda esfera cerrada en un espacio métrico es compacta, el espacio es completo.

22. Demostrar que toda sucesión parcial de una sucesión de Cauchy es de Cauchy.

23. Demostrar que las únicas sucesiones de Cauchy en un espacio métrico discreto son las semiconstantes.

24. Demostrar que todo espacio métrico discreto es completo.

25. Probar que una sucesión de Cauchy, cuyo rango es finito, es semiconstante.

26. Demostrar que el espacio métrico del Ejercicio 9 del Capítulo I es completo.

27. Probar que el conjunto C de las sucesiones reales convergentes es cerrado en el espacio métrico del Ejercicio 9 del Capítulo I.

28. Demostrar que el conjunto derivado (se supone no vacío) de un conjunto precompacto en un espacio completo, es compacto.

29. Sea S un conjunto denso en el espacio (E, d), tal que toda sucesión de Cauchy en S es convergente (no necesariamente en S). Demostrar que (E, d) es completo.

30. Probar que, si todo conjunto cerrado y acotado de (E, d) constituye un subespacio completo, entonces (E, d) es completo.

31. Demostrar que un bloque centrado y cerrado en R^n es compacto.

32. Sea $\{A_0, A_1, \cdots\}$ una familia contable de conjuntos no vacíos en R^n, tal que A_0 es acotado y $\forall k \in N : A_k$ es cerrado y $A_{k+1} \subset A_k$.

Demostrar que $\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k$ es cerrado y no vacío.

(*Sugerencia*: Corolario 3''' de 5.4.)

33. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en la recta real cuyo rango R_0 es acotado. Definamos la familia contable de conjuntos $\{R_0, R_1, \cdots\}$ tal que $\forall n \in N : R_n$ es el rango de la sucesión $\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$.
Construyamos un par de sucesiones reales $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ tales que

$$\forall n \in N : y_n = \inf R_n, z_n = \sup R_n.$$

Demuéstrese que ambas convergen.
Límites inferior y superior de oscilación de $\{x_n\}$ se definen y se escriben respectivamente

$$\underline{\text{lím}}\, x_n = \text{lím}\, y_n, \overline{\text{lím}}\, x_n = \text{lím}\, z_n.$$

Probar que $\{x_n\}$ es convergente si y sólo si sus límites de oscilación son iguales, en cuyo caso, ése es el límite de $\{x_n\}$.

(*Sugerencia*: Examínese la demostración del Teorema 1 de 5.4.)

34. Con el mismo planteamiento y notación del ejercicio anterior, demuéstrese:

a) $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{R}_n$ no es vacío.

b) $\underline{\lim}\, x_n = \inf A$, $\overline{\lim}\, x_n = \sup A$.

35. Probar que toda sucesión en R^n cuyo rango sea acotado, admite una sucesión parcial convergente.

36. El espacio (E, d) es tal que toda familia contable de esferas cerradas

$$\{\overline{N}(x_1; r_1), \overline{N}(x_2; r_2), \ldots, \overline{N}(x_n; r_n), \ldots\},$$

con $r_n \to 0$ y $\overline{N}(x_{n+1}; r_{n+1}) \subset \overline{N}(x_n; r_n)$, $\forall n \geq 1$, tiene intersección no vacía.

Probar que (E, d) es completo.

37. Probar que la unión en una familia contable de conjuntos magros es un conjunto magro.

38. Sea $f : A \subset E \to R$, $a \in A'$ y existe $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

Demostrar que, si $b < c$, entonces existe un entorno S de a tal que

$$\forall x \in (S - \{a\}) \cap A : f(x) < c.$$

39. Sea $f : A \subset E \to R$, $a \in A'$ y existe $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

Probar que, si $b \neq 0$, existe un entorno S de a tal que

$$\forall x \in (S - \{a\}) \cap A : f(x)$$

tiene el mismo signo que b.

40. Sean $f, g : A \subset E \to R$, $a \in A'$ y existen $\lim_{x \to a} f(x) = b_1$, $\lim_{x \to a} g(x) = b_2$.

Demostrar:

a) Si $b_1 < b_2$, existe un entorno S de a tal que

$$\forall x \in (S - \{a\}) \cap A : f(x) < g(x).$$

b) Si para un entorno S de a se cumple que

$$\forall x \in (S - \{a\}) \cap A : f(x) < g(x),$$

entonces $b_1 \leq b_2$.

41. Sean $f, g, h : A \subset E \to R$, $a \in A'$ y $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = b$.

Probar que, si

$$\forall x \in A : f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

entonces existe $\lim_{x \to a} g(x)$ y es igual a b.

42. Sea $f : A \subset R \to F$, donde A no está acotado superiormente. Se dice que $b \in F$ es límite de f en $+\infty$ y se escribe $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ si a cada entorno T de b corresponde un $k > 0$ tal que

$$\forall x \in A \text{ con } x > k : f(x) \in T.$$

Adecúense a esta definición los enunciados de los Teoremas 1, 2, 3 y 4 de 5.7 y demuéstrense.

43. Interpretándose una sucesión $\{x_n\}$ en (E, d) como una función $f : N \subset R \to E$, donde $f(n) = x_n$, $\forall n \in N$, demuéstrese que

$$\lim x_n = \lim_{n \to +\infty} f(n).$$

(Téngase presente la definición del ejercicio anterior.)

44. Demostrar que todo subconjunto de un conjunto magro es magro.

45. Probar que, en la recta real, el conjunto de los números racionales es magro y el de los irracionales es de segunda categoría.

46. A y B son conjuntos en un espacio métrico cualquiera tales que A es abierto y $A \cap B$ es magro. Demostrar que $\bar{A} \cap B$ es magro.
(*Sugerencia*: Teorema 1 de 2.7.)

47. A es abierto, C es compacto y $C \subset A$. Demostrar que existe un $r > 0$ tal que $\forall x \in C : N(x; r) \subset A$.
(*Sugerencia*: Reducción al absurdo.)

CAPITULO VI

Continuidad

6.1. CONTINUIDAD EN UN PUNTO

La idea de continuidad constituye, sin duda, uno de los conceptos capitales de la Topología y el Análisis. El sentido intuitivo del término lo poseemos todos de una manera imprecisa y su aparición en el ámbito de la ciencia y la filosofía se remonta a la época de los griegos. Como suele suceder con las nociones más primitivas de la mente humana (número natural, límite, tiempo, fuerza, etc.), el esclarecimiento y formulación precisa de la idea de continuidad, al menos en la Matemática, tardó cientos de años. Tan sólo en la segunda mitad del siglo pasado se comienza a vislumbrar una definición satisfactoria. De entonces al presente, el concepto matemático ha adquirido la más completa claridad y depuración, acompañadas de una gran abstracción y generalidad.

Iniciamos con la definición de continuidad de una función en un punto. Este caso aparenta no tener mucha relación con nuestra intuición sugerida por el vocablo, pero la correspondencia se hace más estrecha cuando tratamos la continuidad de una función en un conjunto, particularmente si es conexo.

Sean (E, d) y (F, d') espacios métricos cualesquiera y A un subconjunto de E.

Consideremos una función $f : A \subset E \to F$.

Se dice que f *es continua en el punto* $a \in A$ si a todo entorno T de $f(a)$ corresponde un entorno S de a tal que

$$f(S \cap A) \subset T,$$

es decir,

$$\forall x \in S \cap A : f(x) \in T.$$

Nótese que $S \cap A \neq \phi$, ya que al menos $a \in S \cap A$.

Recordando la interpretación intuitiva de entorno, la definición indica que f es continua en $a \in A$ si $f(x)$ se acerca a $f(a)$ tanto como se quiera, con sólo tomar x lo bastante próximo al punto a. Salta a la vista la semejanza con el concepto de límite de f en a y, en efecto, existe una relación muy estrecha que será dilucidada en el Teorema 1.

Quizá el ejemplo más sencillo es el de una función constante $f : A \subset E \rightarrow F$ tal que $\forall x, y \in A : f(x) = f(y) = b$. Se comprueba de inmediato que f es continua en todo punto $a \in A$. En este caso cualquier entorno de a satisface la definición, sin importar cuál sea el entorno de $f(a) = b$.

Consideremos la función idéntica $j: A \subset E \rightarrow E$, tal que $\forall x \in A: j(x) = x$, y tomemos un $a \in A$ cualquiera. Dado un entorno T de $j(a) = a$, tomamos el entorno T de a y se verifica trivialmente

$$j(T \cap A) = T \cap A \subset T.$$

De manera que j es continua en todo punto de A.

Volvamos al caso general de una función $f : A \subset E \rightarrow F$ y supongamos que es continua en $a \in A$.

Dado $\varepsilon > 0$, $N(f(a)\,; \varepsilon)$ es un entorno de $f(a)$, luego existe un entorno S de a tal que

$$f(S \cap A) \subset N(f(a)\,; \varepsilon), \tag{1}$$

pero $a \in S$ y S es abierto, por tanto existe un $\delta > 0$ con

$$N(a; \delta) \subset S,$$

lo cual implica, en virtud de (1), que

$$f[A \cap N(a; \delta)] \subset N(f(a)\,; \varepsilon),$$

pero esto equivale a

$$\forall x \in A \text{ con } d(x, a) < \delta : d'(f(x), f(a)) < \varepsilon. \tag{2}$$

Recíprocamente, supongamos que a cada $\varepsilon > 0$ corresponde un $\delta > 0$ tal que se verifica (2) y demostremos que f es continua en a. En efecto, dado un entorno T de $f(a)$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$N(f(a);\varepsilon) \subset T,$$

pero, en virtud de nuestra suposición, a ε corresponde un $\delta > 0$ para el cual se cumple (2). Por otra parte, sabemos que (2) es equivalente a

$$f[N(a;\delta) \cap A] \subset N(f(a);\varepsilon)$$

de donde

$$f[N(a;\delta) \cap A] \subset T$$

y, teniendo en cuenta que $N(a;\delta)$ es un entorno de a, f es continua en a.

En resumen, hemos obtenido una definición equivalente a la dada: $f : A \subset E \to F$ es continua en el punto $a \in A$ si y sólo si a cada $\varepsilon > 0$ corresponde un $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in A \text{ con } d(x,a) < \delta : d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

En adelante emplearemos una u otra definición según convenga a cada caso.

Ya hemos observado la analogía existente entre los conceptos de continuidad en un punto y límite de la función en ese punto. El siguiente teorema revela, de manera precisa, la relación entre ambos.

Teorema 1. Sea $f : A \subset E \to F$ y $a \in A$.

1. Si a es punto aislado de A $(a \in A - A')$, entonces f es continua en a.
2. Si a es punto de acumulación de A $(a \in A \cap A')$, entonces f es continua en a si y sólo si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Demostración.

1. Como $a \in A - A'$, existe un entorno S_1 de a tal que

$$S_1 \cap A = \{a\}.$$

A todo entorno T de $f(a)$ hacemos corresponder el entorno S_1 de a y se verifica:

$$f(S_1 \cap A) = \{f(a)\} \subset T.$$

f es, pues, continua en el punto a.

2. Supongamos que f es continua en el punto $a \in A \cap A'$. Luego, dado un entorno T de $f(a)$, existe un entorno S de a tal que

$$f(S \cap A) \subset T.$$

Pero, como $a \in A'$,

$$\phi \neq (S - \{a\}) \cap A \subset S \cap A,$$

de donde

$$f[(S - \{a\}) \cap A] \subset T,$$

es decir

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Recíprocamente, $a \in A \cap A'$ y $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Demostremos que f es continua en a. Dado un entorno T de $f(a)$, existe un entorno S de a tal que

$$f[(S - \{a\}) \cap A] \subset T,$$

pero $f(a) \in T$, luego también $f(S \cap A) \subset T$ y f es continua en el punto a.

Como consecuencia inmediata del teorema precedente observamos que si (E, d) es un espacio métrico discreto, entonces toda función $f : A \subset E \to F$ ((F, d') es cualquiera) es continua en todo punto de A, ya que cada punto de E es aislado.

Veamos ahora cómo se relaciona la continuidad en un punto con sucesiones convergentes.

Teorema 2. Sea $f : A \subset E \to F$ y $a \in A$. f es continua en el punto a si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}$ en A, con $x_n \to a$, $f(x_n) \to f(a)$.

Demostración. Antes que nada nótese que $a \in \bar{A}$, lo cual implica, por el corolario 2′ de 5.1, que existen sucesiones $\{x_n\}$ en A con $x_n \to a$.

Supongamos que f es continua en el punto a y sea $\{x_n\}$ una sucesión en A con $x_n \to a$.

Dado un entorno T de $f(a)$, existe un entorno S de a tal que

$$f(S \cap A) \subset T. \tag{1}$$

Pero al entorno S de a corresponde un $\nu \in N$ tal que $\forall n \geq \nu : x_n \in S$. Por otra parte, como la sucesión $\{x_n\}$ está en A, también $x_n \in A$. En resumen,

$$\forall n \geq \nu : x_n \in S \cap A,$$

lo cual implica, en virtud de (1), que

$$\forall n \geq \nu : f(x_n) \in T,$$

es decir,

$$f(x_n) \to f(a).$$

Recíprocamente, supongamos que para toda sucesión $\{x_n\}$ en A, con $x_n \to a$, $f(x_n) \to f(a)$.

Si $a \in A - A'$, la proposición 1 del Teorema 1 nos dice que f es continua en a y no hay más nada que probar.

Consideremos pues que $a \in A \cap A'$; entonces, por aplicación directa de la proposición 2 del Teorema 2 de 5.7, la hipótesis implica que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ y f es continua en el punto a por la proposición 2 del Teorema 1. ●

El resultado que sigue, cuya demostración es inmediata, probará ser de mucha utilidad.

Teorema 3. Sean (E, d), (F, d'), (G, d'') espacios métricos, $f : A \subset E \to F$, $g : B \subset F \to G$ con $f(A) \subset B$.

Si para $a \in A'$ existe $\lim_{x \to a} f(x) = b$, $b \in B$ y g es continua en b, entonces

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = g(b).$$

DEMOSTRACIÓN. Se exige que $f(A) \subset B$ con objeto de poder considerar la función compuesta

$$g \circ f : A \subset E \to G.$$

Tiene, pues, sentido pretender calcular el límite de $g \circ f$ en $a \in A'$.

Sea U un entorno de $g(b)$. Como g es continua en $b \in B$, existe un entorno T de b con

$$g(T \cap B) \subset U. \tag{1}$$

Por otra parte, $\lim_{x \to a} f(x) = b$, de manera que al entorno T de b corresponde un entorno S de a tal que

$$f[(S - \{a\}) \cap A] \subset T,$$

pero es evidente que

$$f[(S - \{a\}) \cap A] \subset f(A) \subset B,$$

luego,

$$f[(S - \{a\}) \cap A] \subset T \cap B,$$

lo cual implica, teniendo en cuenta (1):

$$g \circ f[(S - \{a\}) \cap A] \subset g(T \cap B) \subset U.$$

De manera que, por definición, $\lim_{x \to a} g \circ f(x) = g(b)$.

Refiriéndonos al enunciado del teorema precedente y recordando lo establecido en 5.7, sabemos que

$$b \in \overline{f(A)};$$

o sea que, si se adopta la hipótesis $\overline{f(A)} \subset B$, quedan implicadas las condiciones $f(A) \subset B$ y $b \in B$. No obstante, se restaría algo de generalidad.

Del Teorema 3 obtenemos una consecuencia tan sencilla como importante. Se puede describir de manera sugestiva diciendo que el compuesto de funciones continuas es una función continua.

Teorema 4. Sean (E, d), (F, d'), (G, d'') espacios métricos, $f : A \subset E \to F$, $g : B \subset F \to G$ con $f(A) \subset B$.

Si f es continua en el punto $a \in A$ y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a.

DEMOSTRACIÓN. La hipótesis $f(A) \subset B$ nos permite considerar la función compuesta

$$g \circ f : A \subset E \to G.$$

Si a es un punto aislado de A, la proposición 1 del Teorema 1 nos dice que $g \circ f$ es continua en a.

Supongamos que $a \in A \cap A'$, entonces, de acuerdo con la proposición 2 del Teorema 1 y la continuidad de f en a,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Por hipótesis, g es continua en $f(a) \in B$, luego, en virtud del Teorema 3,

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = g[f(a)] = g \circ f(a),$$

lo cual implica la continuidad de $g \circ f$ en a por la proposición 2 del Teorema 1.

6.2. CONTINUIDAD EN UN CONJUNTO

Una propiedad de una función en un punto, tal como poseer límite o ser continua en el sentido dado en la sección anterior, se denomina local o puntual. Las propiedades más interesantes y, por lo general, más difíciles y profundas son las que afectan a la función en todo un conjunto de puntos; éstas se llaman globales.

Aquí estudiaremos el comportamiento de una función continua en todos los puntos de su dominio. Más adelante veremos lo que sucede al imponer condiciones adicionales a ese dominio: compacto, conexo, etc. Se trata, pues, del estudio de la continuidad global.

Sea $f : A \subset E \to F$. Decimos que f *es continua en el conjunto* A si f es continua en todo punto de A.

Vimos en 6.1 que si f es constante en A, entonces f es continua en A.

También en 6.1 se estableció que la función idéntica $j : A \subset E \to E$, tal que $\forall x \in A : j(x) = x$, es continua en A.

Consideremos el espacio métrico (E, d) y un punto cualquiera $a \in E$. Definamos la función

$$f : E \to R,$$

donde R es el conjunto de los números reales provisto de la métrica usual (Ejemplo 2 de 1.1), tal que

$$\forall x \in E : f(x) = d(a, x).$$

Tomemos un $x_0 \in E$ genérico y veamos que f es continua en x_0. En virtud del Lema 1 de 1.1, resulta

$$\forall x \in E : |d(x,a) - d(x_0,a)| \leq d(x,x_0),$$

es decir,

$$\forall x \in E : |f(x) - f(x_0)| \leq d(x,x_0).$$

De manera que, dado $\varepsilon > 0$, basta con tomar $\delta = \varepsilon$ y se verifica

$$\forall x \in E \text{ con } d(x,x_0) < \varepsilon : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

O sea que f es continua en x_0 y, como éste es un punto cualquiera de E, f es continua en E.

Más general, sea A un conjunto no vacío en (E,d). Definamos la función

$$g : E \rightarrow R$$

tal que

$$\forall x \in E : g(x) = d(x,A).$$

Tomemos un $x_0 \in E$ cualquiera y, según lo establecido en 1.2,

$$\forall x \in E : |d(x,A) - d(x_0,A)| \leq d(x,x_0),$$

es decir,

$$\forall x \in E : |g(x) - g(x_0)| \leq d(x,x_0).$$

O sea que, razonando de manera idéntica al ejemplo anterior, concluimos que g es continua en E.

Como consecuencia inmediata del Teorema 4 de 6.1 obtenemos el siguiente e importante.

Teorema 1. Sean (E,d), (F,d'), (G,d'') espacios métricos $f : A \subset E \rightarrow F$, $g : B \subset F \rightarrow G$ con $f(A) \subset B$.

Si f es continua en A y g es continua en $f(A)$, entonces $g \circ f$ es continua en A.

Demostración. De acuerdo con el Teorema 4 de 6.1, si f es continua en $a \in A$ y g es continua en $f(a)$, entonces la función compuesta $g \circ f$ es continua en a. Pero, como, por hipótesis, esto sucede para todo punto de A, $g \circ f$ es continua en A.

Procedemos ahora a establecer el resultado fundamental de esta sección, cuyas consecuencias son de largo alcance. Nos proporciona tres propiedades, cada una de las cuales caracteriza la continuidad global de la función.

Teorema 2. Sea $f : A \subset E \to F$.

Las siguientes propiedades son equivalentes:

1. f es continua en A.
2. Si T es un conjunto abierto en (F, d'), entonces $f^{-1}(T)$ es abierto en el subespacio (A, d).
3. Si T es un conjunto cerrado en (F, d'), entonces $f^{-1}(T)$ es cerrado en el subespacio (A, d).
4. Para todo conjunto S con $S \subset A$ se verifica

$$f(A \cap \overline{S}) \subset \overline{f(S)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Estableceremos las equivalencias demostrando la cadena de implicaciones:

$$1 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 1.$$

$1 \Longrightarrow 4$) f es continua en A y tomamos un S con $S \subset A$. Si S es vacío también lo son $A \cap \overline{S}$, $f(A \cap \overline{S})$ y $f(S)$, y la inclusión en 4 se verifica trivialmente.

Supongamos, pues, que S no es vacío y tomemos un $x \in A \cap \overline{S}$ cualquiera,

Debido a que $x \in \overline{S}$, existe una sucesión $\{x_n\}$ en S (por tanto en A, ya que $S \subset A$) con $x_n \to x$ (corolario 2′ de 5.1). Pero f es continua en $x \in \overline{S} \cap A$, lo cual implica, en virtud del Teorema 2 de 6.1, que $f(x_n) \to f(x)$.

Ahora bien, la sucesión $\{x_n\}$ está en S, luego la sucesión $\{f(x_n)\}$ está en $f(S)$ y, de nuevo por el corolario 2′ de 5.1,

$$f(x) \in \overline{f(S)}.$$

En resumen,

$$\forall x \in A \cap \overline{S} : f(x) \in \overline{f(S)},$$

lo cual equivale a

$$f(A \cap \overline{S}) \subset \overline{f(S)}.$$

$4 \Longrightarrow 3$) Para todo S con $S \subset A : f(A \cap \overline{S}) \subset \overline{f(S)}$.

Sea T un conjunto cerrado en (F, d'). Se tiene entonces que $f^{-1}(T) \subset A$ y, en virtud de la hipótesis,

$$f[A \cap \overline{f^{-1}(T)}] \subset \overline{f[f^{-1}(T)]} \subset \overline{T} = T,$$

de donde

$$A \cap \overline{f^{-1}(T)} \subset f^{-1}(T).$$

Pero

$$f^{-1}(T) = A \cap f^{-1}(T) \subset A \cap \overline{f^{-1}(T)};$$

luego

$$f^{-1}(T) = A \cap \overline{f^{-1}(T)}$$

y, por el Teorema 2 de 2.6, $f^{-1}(T)$ es cerrado en el subespacio (A, d).

$3 \Longrightarrow 2)$ La imagen inversa, bajo f, de todo conjunto cerrado en (F, d') es cerrada en el subespacio (A, d).

Sea T un conjunto abierto en (F, d'); luego $F-T$ es cerrado en (F, d') (corolario 3′ de 2.4) y, en virtud de la hipótesis, $f^{-1}(F-T)$ es cerrado en el subespacio (A, d). Pero el lector comprobará con facilidad que

$$f^{-1}(F-T) = A - f^{-1}(T),$$

lo cual implica, de nuevo por el corolario 3′ de 2.4, que $f^{-1}(T)$ es abierto en el subespacio (A, d).

$2 \Longrightarrow 1)$ La imagen inversa, bajo f, de todo conjunto abierto en (F, d') es abierta en el subespacio (A, d).

Tomemos un punto $x \in A$ cualquiera y sea T un entorno de $f(x)$. Como T es abierto en (F, d'), $f^{-1}(T)$ es abierto en el subespacio (A, d), por hipótesis. Luego, en virtud del Teorema 1 de 2.6, existe un conjunto S, abierto en (E, d) con

$$f^{-1}(T) = S \cap A,$$

de donde

$$f(S \cap A) \subset T$$

y S es un entorno de x, ya que, evidentemente, $x \in f^{-1}(T) = S \cap A$.

Se concluye que f es, por definición, continua en el punto x y, como éste es cualquiera, f es continua en A.

Es interesante obscervar que la inclusión que aparece en 4 del Teorema precedente es equivalente a

$$\overline{f(A \cap \overline{S})} = \overline{f(S)}. \tag{1}$$

En efecto, si se cumple (1) tenemos

$$f(A \cap \overline{S}) \subset \overline{f(A \cap \overline{S})} = \overline{f(S)}.$$

Por otra parte, como $S \subset A$,

$$S = A \cap S \subset A \cap \bar{S},$$

luego

$$f(S) \subset f(A \cap \bar{S}) \subset \overline{f(S)},$$

suponiendo que se cumple la inclusión de 4, y clausurando obtenemos

$$\overline{f(S)} \subset \overline{f(A \cap \bar{S})} \subset \overline{f(S)},$$

lo cual implica (1).

En cuanto a las propiedades 2 y 3, nótese que se refieren a imágenes *inversas* de abiertos y cerrados. Es falso que la imagen directa, bajo una función continua, de un conjunto abierto es abierta, en general, y lo mismo vale decir para conjuntos cerrados.

Sea, por ejemplo, la función φ de la recta real en sí misma tal que

$$\forall x \in R : \varphi(x) = d(x, 0) = |x|.$$

Sabemos que φ es continua en R; no obstante, la imagen, bajo φ, del conjunto abierto $(-1, 1)$, es el intervalo $[0, 1)$ que no es abierto.

Designemos por R_1 al espacio métrico constituido por el conjunto de los números reales provisto de la métrica discreta. Ya sabemos que toda función cuyo dominio sea R_1 es continua en él, en particular la función idéntica $j : R_1 \to R$, cuyo espacio co-dominio es la recta real. Ahora bien, todo conjunto de números reales es abierto y cerrado en R_1; tomemos uno A que no sea cerrado en la recta real, entonces A es cerrado en R_1, pero su imagen $j(A) = A$ no es cerrada en R. Hemos podido razonar de manera análoga en relación a conjuntos abiertos.

Consideremos ahora la función idéntica $h : R \to R_1$. Es muy fácil comprobar que h no es continua en ningún punto de R. No obstante, si A es un conjunto abierto (cerrado) en R, su imagen $h(A) = A$ es abierta (cerrada) en R_1. O sea que tal propiedad no implica la continuidad de la función.

Conviene destacar un par de consecuencias inmediatas del Teorema 2, las cuales permiten caracterizar la continuidad de funciones en conjuntos abiertos y cerrados.

Corolario 2'. Sea $f : A \subset E \to F$, donde A es abierto. f es continua en A si y sólo si para todo conjunto T, abierto en (F, d'), $f^{-1}(T)$ es abierto en (E, d).

Demostración. Según el Teorema 2, f es continua en A si y sólo si para todo conjunto T, abierto en (F, d'), $f^{-1}(T)$ es abierto en el subespacio (A, d). Pero, como A es abierto, resulta (véase 2.6) que un conjunto es abierto en (A, d) si y sólo si es abierto en (E, d).

Corolario 2″. Sea $f : A \subset E \to F$, donde A es cerrado. f es continua en A si y sólo si para todo conjunto T, cerrado en (F, d'), $f^{-1}(T)$ es cerrado en (E, d).

Demostración. Idéntica al Corolario 2′, substituyendo abierto por cerrado.

Si $f : E \to F$ es biyectiva y continua en E, no es necesariamente cierto que la función inversa $f^{-1} : F \to E$ sea continua en F. Tal es el caso de las funciones j, h definidas anteriormente: j es continua y biyectiva en R_1 en tanto que su inversa h no es continua en punto alguno de R.

Si $f : E \to F$ es biyectiva y continua en E con inversa f^{-1} continua en F, decimos que f es un *homeomorfismo* y que el espacio (E, d) es *homeomórfico* al (F, d').

Es rutinario demostrar que el homeomorfismo, visto como relación binaria en la clase de todos los espacios métricos, es una relación de equivalencia. Se deja la comprobación al lector.

Considerando una biyección $f : E \to F$, la aplicación directa del Teorema 2 a f y f^{-1} nos indica que f es un homeomorfismo si y sólo si la imagen (bajo f) de todo conjunto abierto en E es abierta en F y la imagen inversa de todo abierto en F es abierta en E. Criterio igualmente válido obtenemos substituyendo el término abierto por cerrado.

Vemos, pues, que entre espacios homeomórficos existe una correspondencia biunívoca entre los abiertos de uno y los abiertos del otro, ocurriendo lo mismo para los cerrados. Se deduce que toda propiedad de un espacio, que pueda formularse únicamente en términos de conjuntos abiertos y cerrados, es compartida por cualquier espacio homeomórfico con él. Esta consecuencia le confiere al homeomorfismo una importancia fundamental en Topología General.

Por el contrario, propiedades del espacio que dependan directamente de la métrica, tales como conjunto acotado, sucesiones de Cauchy, etc., no se corresponden en espacios homeomórficos.

El Teorema 2 (4) proporciona una elegante caracterización de homeomorfismo (véase el Ejercicio 19).

Espacios isométricos (1.3) son evidentemente homeomórficos, como puede verificarse de inmediato, pero es claro que lo contrario no es cierto, en general. La isometría es, pues, una relación de equivalencia más poderosa

que el homeomorfismo, aunque demasiado restrictiva. Más adelante introduciremos una nueva equivalencia intermedia entre ambas y adecuada a espacios métricos.

Muchas situaciones en Análisis y Topología plantean la necesidad de "extender" una función continua a un dominio "más grande" y conviene averiguar cómo y bajo qué condiciones esto puede hacerse. Precisemos el concepto. Sea $f : A \subset E \to F$ continua en A y $A \subset B$; una *extensión continua de f a B* es una función $g : B \subset E \to F$ continua en B y que coincide con f en A, es decir, $\forall x \in A : g(x) = f(x)$. Se trata no sólo de determinar la existencia de g sino también su unicidad.

Son muchos y, con frecuencia, difíciles los teoremas de extensión. Aquí nos ocuparemos de la extensión de una función continua a la clausura de su dominio. Antes debemos establecer un par de lemas.

Lema 1. Sean $f, g : A \subset E \to F$ continuas en A.

El conjunto

$$B = \{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$$

es cerrado en el subespacio (A, d).

Demostración. Definamos una función auxiliar $h : A \subset E \to R$ tal que

$$\forall x \in A : h(x) = d'(f(x), g(x)).$$

Demostraremos que h es continua en A comprobando su continuidad en un punto cualquiera $a \in A$.

Dado $\varepsilon > 0$, como f y g son continuas en a, podemos hallar un $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in A \text{ con } d(x, a) < \delta :$$
$$d'(f(x), f(a)) < \varepsilon/2, \quad d'(g(x), g(a)) < \varepsilon/2.$$

Aplicando ahora el lema 1 de 1.1, tenemos que $\forall x \in A$ con $d(x, a) < \delta$:

$$|h(x) - h(a)| = |d'(f(x), g(x)) - d'(f(a), g(a))| \leq$$
$$\leq d'(f(x), f(a)) + d'(g(x), g(a)) < \varepsilon.$$

h es, pues, continua en A.

Por otra parte, podemos expresar

$$B = \{x \in A \mid h(x) = 0\} = h^{-1}\{0\},$$

pero el conjunto $\{0\}$ es cerrado en la recta real, luego, por el Teroema 2, (3), B es cerrado en el subespacio (A, d).

Lema 2. Si $f, g : \bar{A} \subset E \to F$ son continuas en $\bar{A}$ y coinciden en A ($\forall x \in A$: $f(x) = g(x)$) entonces coinciden en $\bar{A}$ ($\forall x \in \bar{A} : f(x) = g(x)$).

Demostración. En virtud del lema 1, el conjunto

$$B = \{x \in \bar{A} \mid f(x) = g(x)\}$$

es cerrado en el subespacio $(\bar{A}, d)$, pero como $\bar{A}$ es cerrado, entonces B es cerrado en (E, d) (véase 2.6).

La hipótesis implica que $A \subset B$, de donde $\bar{A} \subset B$ (sabiendo que B es cerrado), pero, en todo caso $B \subset \bar{A}$. Tenemos pues que $B = \bar{A}$.

Estamos ahora preparados para demostrar el siguiente e importante teorema. En él se proporciona una condición necesaria y suficiente para la existencia de la extensión de una función continua a la clausura de su dominio y la unicidad de la misma. Nótese que el teorema indica, además, cómo construir la extensión continua.

Teorema 3. Sea $f : A \subset E \to F$ continua en A. Existe una función $g : \bar{A} \subset E \to F$ continua en $\bar{A}$ y coincidente con f en A ($\forall x \in A : g(x) = f(x)$) si y sólo si existe $\lim_{x \to a} f(x)$, para todo $a \in A'$.

La función g, de existir, es única.

Demostración. Supongamos que existe la función g del enunciado y sea también $h : \bar{A} \subset E \to F$ continua en $\bar{A}$ y coincidente con f en A. Sucede entonces que $\forall x \in A : g(x) = h(x) = f(x)$, es decir, g y h coinciden en A, lo cual implica, de acuerdo con el lema 2, que coinciden en $\bar{A}$. O sea que g es única.

Consideremos, por otra parte, la función idéntica $j : A \subset E \to E$, tal que $\forall x \in A : j(x) = x$. Podemos expresar $f = g \circ j$, además, es evidente que, si $a \in A'$, $\lim_{x \to a} j(x) = a$ y g es continua en $a \in \bar{A}$. Aplicando entonces el Teorema 3 de 6.1, existe

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g \circ j(x) = g(a).$$

Recíprocamente, supongamos que existe $\lim_{x \to a} f(x)$, para todo $a \in A'$, y construyamos la función $g : \bar{A} \subset E \to F$ de la siguiente manera. Para cual-

quier punto $a \in \bar{A} = A \cup A'$, si $a \in A : g(a) = f(a)$; si $a \in A' : g(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.

Puede suceder que $a \in A \cap A'$, pero entonces, como f es continua en a, la proposición 2 del Teorema 1 de 6.1 nos dice que

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x) = g(a).$$

De manera que g está bien definida para todo punto de $\bar{A}$. Resta probar la continuidad de g en $\bar{A}$.

Tomemos un $a \in \bar{A}$. Si a es punto aislado de $\bar{A}$, g es continua en a, por la proposición 1 del Teorema 1 de 6.1. Consideremos el caso en que $a \in (\bar{A})'$; de acuerdo con el Teorema 1 de 2.4, $(\bar{A})' = A'$, o sea que $a \in A'$ y $g(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.

Sea T un entorno cualquiera de $g(a)$; existe una esfera *cerrada* $C = \overline{N}(g(a); r)$ con $C \subset T$. Por definición de límite, al entorno $N(g(a); r)$ de $g(a)$ corresponde un entorno S de a tal que

$$f[(S - \{a\}) \cap A] \subset N(g(a); r) \subset C.$$

Nótese que el conjunto $B = S - \{a\}$ es abierto, por el corolario 4' de 2.4. Podemos escribir la inclusión anterior

$$f(B \cap A) \subset C. \tag{1}$$

Consideremos el conjunto $B \cap \bar{A}$ y tomemos un $z \in B \cap \bar{A}$. Si U es un entorno cualquiera de z tenemos $U \cap (B \cap A) = (U \cap B) \cap A \neq \phi$ ya que $U \cap B$ es un entorno de $z \in \bar{A}$ (Teorema 2 de 2.4), pero entonces, por el mismo Teorema 2 de 2.4,

$$z \in \overline{B \cap A} = (B \cap A) \cup (B \cap A)'.$$

Si $z \in B \cap A$, $g(z) = f(z) \in f(B \cap A)$, o sea que, por (1), $g(z) \in C$.

Supongamos que $z \in (B \cap A)' \subset A'$. Luego $g(z) = \lim_{x \to z} f(x)$. Pero, por el Teorema 2 de 5.1, existe una sucesión $\{z_n\}$ en $B \cap A$ (y por tanto en A) con $z_n \to z$, lo cual implica, en virtud de la proposición 1 del Teorema 2 de 5.7, que $f(z_n) \to g(z)$. Ahora, la sucesión $\{f(z_n)\}$ está en $f(B \cap A)$, de manera que

$$g(z) \in \overline{f(B \cap A)},$$

por el corolario 2′ de 5.1 y, teniendo en cuenta (1), sabiendo que C es cerrado, $g(z) \in C$.

En resumen,

$$\forall z \in B \cap \bar{A} : g(z) \in C,$$

lo que equivale a

$$g[(S - \{a\}) \cap \bar{A}] \subset C \subset T,$$

es decir,

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

O sea que, por la proposición 2 del Teorema 1 de 6.1, g es continua en $a \in (\bar{A})'$.

En definitiva, g es continua en $\bar{A}$.

6.3. CONTINUIDAD EN CONJUNTOS COMPACTOS

Aquí estudiaremos las propiedades de una función cuando es continua en su dominio y éste es compacto. Como la compacidad es una propiedad muy poderosa, es de esperar que tales funciones tengan un comportamiento significativo y, en efecto, así sucede. Veremos también, por el resto de la obra, que las aplicaciones son muchas e interesantes.

Comenzamos por establecer que el rango de una función continua en un conjunto compacto es compacto. Proporcionamos dos demostraciones distintas de ese importante resultado. Una se apoya en la definición de compacidad y el Teorema 2 de 6.2; la otra aplica el concepto de compacidad secuencial (SC). El lector podrá preferir cualquiera de las dos, aunque conviene advertir que la primera es generalizable textualmente a espacios topológicos, en tanto que la otra no.

Teorema 1. Si $f : A \subset E \to F$ es continua en el conjunto compacto A, entonces su rango $f(A)$ es compacto.

1ª DEMOSTRACIÓN. Sea G una cobertura abierta del conjunto $f(A)$. Cada conjunto B de G es pues abierto en (F, d') y, como f es continua en A, $f^{-1}(B)$ es abierto en el subespacio (A, d) (Teorema 2 de 6.2). Luego, $f^{-1}(B) = A \cap S$, donde S es abierto en (E, d) (Teorema 1 de 2.6).

Ahora bien, la familia de todos estos conjuntos abiertos S es una cobertura abierta de A; ya que, si $x \in A$, $f(x) \in f(A)$, por lo cual $f(x) \in B$, para algún $B \in G$, pero entonces $x \in f^{-1}(B) = A \cap S \subset S$.

Como A es compacto, existe una subcobertura finita $\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} S_i,$$

la cual se corresponde, según la construcción, con una subfamilia finita $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ de G. Resulta entonces que

$$f(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i;$$

ya que si $f(x) \in f(A)$, $x \in A$ y por tanto $x \in S_i$, para algún $i = 1, 2, \cdots, n$, luego $x \in A \cap S_i = f^{-1}(B_i)$, de donde $f(x) \in B_i$. $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ es pues una subcobertura finita de $f(A)$.

2ª Demostración. Probaremos que $f(A)$ es compacto demostrando que es SC (véase el Teorema 4 de 5.1).

Sea $\{y_n\}$ una sucesión en $f(A)$. Para cada $n \in N$ existe al menos un punto $x_n \in A$ con $f(x_n) = y_n$; queda así determinada una sucesión $\{x_n\}$ en A. Pero A es SC, por ser compacto, luego existe una sucesión $\{z_n\}$, parcial de la $\{x_n\}$, con $z_n \to z$, $z \in A$.

Ahora bien, como f es continua en z, $f(z_n) \to f(z)$ (Teorema 2 de 6.1) y $f(z) \in f(A)$. Por otra parte, $\{f(z_n)\}$ es una sucesión parcial de $\{y_n\}$.

En resumen, $\{y_n\}$ admite una sucesión parcial convergente en $f(A)$.

Una propiedad interesante, consecuencia inmediata del teorema precedente, es que las imágenes de conjuntos cerrados, bajo una función continua en un conjunto compacto, son cerrados (recuérdense las consideraciones hechas luego del Teorema 2 de 6.2).

Corolario 1'. Sea $f : A \subset E \to F$ continua en el conjunto compacto A.

Si S es un conjunto cerrado en (E, d) con $S \subset A$, entonces $f(S)$ es cerrado en (F, d').

Demostración. Si $S = \phi$, también $f(S) = \phi$ que es cerrado en (F, d').

Si S no es vacío, el Teorema 4 de 4.3 nos dice que S es compacto y, como f es continua en S, $f(S)$ es compacto, por el Teorema 1, lo cual implica que $f(S)$ es cerrado en (F, d') (corolario 1' de 4.3).

Vale la pena destacar que el Teorema 1 afirma que las funciones continuas "transportan" compactos a compactos, es decir, la compacidad es

invariante con respecto a una transformación continua; es lo que se llama una propiedad topológica. Se deduce que, entre espacios homeomórficos, los conjuntos compactos están en correspondencia biunívoca.

El siguiente resultado, de gran utilidad, garantiza la continuidad de la función inversa de una biyección continua en un conjunto compacto.

Teorema 2. Si $f : A \subset E \to f(A) \subset F$ es una biyección continua en el conjunto compacto A, entonces f^{-1} es continua en $f(A)$.

DEMOSTRACIÓN. Para probar la continuidad de la función inversa

$$f^{-1} : f(A) \subset F \to E$$

aplicaremos el Teorema 2 (3) de 6.2.

Sea pues T un conjunto cerrado en (E, d), entonces

$$(f^{-1})^{-1}(T) = f(T) = f(A \cap T);$$

pero $A \cap T$ es cerrado, por ser intersección de conjuntos cerrados, y $A \cap T \subset A$; luego, por el corolario 1', $f(A \cap T)$ o sea $f(T)$ es cerrado en (F, d').

Ahora bien,

$$f(T) = f(T) \cap f(A),$$

lo cual implica (Teorema 2 de 2.6) que $f(T)$ es cerrado en el subespacio $(f(A), d')$.

La compacidad del dominio no es, por supuesto, una condición necesaria para la continuidad de la función inversa. Basta con tomar un conjunto no compacto A, en un espacio (E, d), y considerar la función idéntica $j : A \to A$, la cual es continua en A, así como su inversa j.

Como caso particular del Teorema 2 vemos que, si $f : E \to F$ es biyectiva, continua en E y E es compacto, entonces f es un homeomorfismo. Podemos agregar que F es también compacto, ya que $F = f(E)$ (Teorema 1).

Consideremos una función $f : A \subset E \to R$, cuyo co-dominio es la recta real. Decimos que f *alcanza un máximo absoluto en el punto* $a \in A$ si

$$\forall x \in A : f(x) \leq f(a).$$

Análogamente, f *alcanza un mínimo absoluto en el punto* $a \in A$ si

$$\forall x \in A : f(a) \leq f(x).$$

En general, decimos que f *alcanza un extremo absoluto en* $a \in A$ si alcanza, en ese punto, un máximo o mínimo absoluto.

Es clara la razón por la cual exigimos que el codominio de f sea la recta real, ya que hacemos uso de la relación de orden sobre los números reales para la definición de extremos.

Nótese que alcanzar un extremo absoluto es una propiedad global de una función; en ella intervienen todos los puntos del dominio. Por otra parte, es evidente que no toda función alcanza extremos absolutos; por ejemplo, la función idéntica de la recta real en sí misma no alcanza ninguno de los dos.

Conviene destacar que, si $f : A \subset E \to R$ alcanza un máximo absoluto en $a \in A$, puede muy bien existir otro punto $a' \in A$, con $a' \neq a$, donde f también alcanza un máximo absoluto. En tal caso, es consecuencia de la definición que $f(a') \leq f(a)$ y $f(a) \leq f(a')$, lo cual implica $f(a) = f(a')$. Observamos que esto no puede suceder si f es inyectiva, en cuyo caso el punto a es único. Idénticas consideraciones pueden hacerse en relación con el mínimo absoluto.

Un ejemplo exagerado, que pone de manifiesto la situación señalada, es el de una función constante. Allí, la función alcanza máximo y mínimo absolutos en todo punto de su dominio.

En muchas cuestiones matemáticas es importante determinar si una función alcanza extremos absolutos y existe una variedad de condiciones suficientes que garantizan la propiedad. En tal sentido demostraremos un importante y famoso teorema, debido a Weierstrass, el cual establece que una función continua en un conjunto compacto alcanza ambos extremos absolutos. Las aplicaciones de este resultado son muy frecuentes e interesantes, en ocasiones sorprendentes. Debe destacarse, no obstante, que se trata de un teorema de tipo existencial: nos asegura la existencia de los extremos, pero no indica cómo hallar los puntos donde los alcanza, lo que a veces puede resultar muy difícil en la práctica.

Antes, se hace necesario probar un sencillísimo lema.

Lema 1. Un conjunto compacto A, en la recta real, admite extremos inferior y superior y ambos pertenecen a A.

Demostración. En virtud del corolario 2′ de 4.3, el conjunto A es acotado y, en la recta real, ello equivale a decir que está acotado inferior y superiormente (véase 4.1). Existen pues $\alpha = \inf A$, $\beta = \sup A$. Demostremos que $\beta \in A$; que $\alpha \in A$ se establece de manera totalmente análoga.

Tomemos un $\varepsilon > 0$ cualquiera. Como $\beta - \varepsilon < \beta$, $\beta - \varepsilon$ no puede ser cota superior de A; existe, por lo tanto, algún $x \in A$ con $\beta - \varepsilon < x \leq \beta$, de donde $\beta - \varepsilon < x < \beta + \varepsilon$, lo cual es equivalente a $|x - \beta| < \varepsilon$. Resulta,

pues, que ningún número real mayor que cero es cota inferior del conjunto $\{|x-\beta|\}$, para todo $x \in A$. Se concluye que el extremo inferior de ese conjunto ha de ser cero (no puede ser negativo), es decir (véase 1.2) $d(\beta, A) = 0$. Pero esto implica, en virtud del Teorema 2 de 2.4 que $\beta \in \bar{A}$ y, como A es cerrado por ser compacto (corolario 1′ de 4.3), $A = \bar{A}$, o sea $\beta \in A$.

Teorema 3. (Weierstrass). Si $f : A \subset E \to R$ es continua en el conjunto compacto A, entonces f alcanza en A máximo y mínimo absolutos.

Demostración. De acuerdo con el Teorema 1, el conjunto $f(A)$, en la recta real, es compacto y, por el lema 1, existen

$$\alpha = \inf f(A), \quad \beta = \sup f(A), \quad \alpha, \beta \in f(A).$$

Como α, β pertenecen al rango de f, deben existir puntos $a, b \in A$ con $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$.

Ahora bien,

$$\forall x \in A : f(x) \in f(A),$$

de donde

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b),$$

o sea que f alcanza en a un mínimo absoluto y en b un máximo absoluto.

De la demostración del teorema precedente se deduce que una función $f : A \subset E \to R$ alcanza un máximo absoluto en A si y sólo si existe $\beta = \sup f(A)$ y $\beta \in f(A)$. Lo mismo vale decir para el mínimo. Lo que hacen las hipótesis de compacidad y continuidad es provocar esa situación.

En calidad de ejercitación y como aplicación ilustrativa del Teorema 3 veamos algunos hechos interesantes.

Sea A un conjunto compacto en un espacio (E, d) y $x_0 \in E$. Se observó en 1.2 que, si A es un conjunto cualquiera, no es de esperarse que en general exista un punto $a \in A$ con $d(x_0, a) = d(x_0, A)$. Veremos, sin embargo, que al ser A compacto siempre existe tal punto. En efecto, la función $f : A \subset E \to R$, tal que $\forall x \in A : f(x) = d(x_0, x)$, es continua en el conjunto compacto A (6.2); luego, por el Teorema 3, existe algún punto $a \in A$ donde f alcanza un mínimo absoluto. Es consecuencia inmediata de la definición de $d(x_0, A)$ (1.2) que

$$f(a) = d(x_0, a) = d(x_0, A).$$

Más general, sea A compacto y B un conjunto no vacío, ambos en (E, d). Definamos la función $g : A \subset E \to R$, tal que $\mathrm{A} x \in A : g(x) = d(x, B)$; es continua en el conjunto compacto A (véase 6.2) y, en virtud del Teorema 3, existe algún punto $a \in A$ donde g alcanza un mínimo absoluto. Se deduce entonces del lema 1 de 1.2 que

$$g(a) = d(a, B) = d(A, B).$$

De esto último obtenemos las siguientes consecuencias interesantes:

1. Si B es compacto también, por lo establecido más arriba existe algún $b \in B$ con $d(a, b) = d(a, B)$, es decir,

$$d(a, b) = d(A, B).$$

2. Supongamos que B es cerrado (y no vacío) y que $A \cap B = \phi$; entonces $a \notin B$ y, como $B = \overline{B}$, tampoco $a \notin \overline{B}$, lo cual implica, por el Teorema 2 de 2.4, que $d(a, B) > 0$, es decir, $d(A, B) > 0$.

Si B no se supone cerrado, puede suceder que $a \in \overline{B} - B$, en cuyo caso $d(A, B) = d(a, B) = 0$, aun cuando $A \cap B = \phi$.

Así mismo, si A y B son cerrados, *pero ninguno compacto*, y $A \cap B = \phi$, es posible que $d(A, B) = 0$.

Como ejemplo de esto véase el ejercicio 16.

6.4. CONTINUIDAD EN CONJUNTOS CONEXOS

Analicemos ahora el caso de una función continua en un conjunto conexo. También aquí se obtienen resultados significativos y de gran trascendencia, no obstante la sencillez de las demostraciones. Se pondrá claramente de manifiesto que el desarrollo formal se corresponde estrechamente con nuestra idea intuitiva de los hechos y de la continuidad en particular.

Al igual que compacidad, comenzamos por establecer la propiedad fundamental de la cual obtendremos todas las demás: la conectividad es invariante con respecto a una transformación continua, es decir, se trata de una propiedad topológica. Así pues, entre espacios homeomórficos, los conjuntos conexos están en correspondencia biunívoca.

Teorema 1. Si $f : A \subset E \to F$ es continua en el conjunto conexo A, entonces su rango $f(A)$ es conexo.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $f(A)$ es disconexo. Esto equivale (véase 1.3) a la existencia de un conjunto no vacío S, con $S \subset f(A)$, pero $S \neq f(A)$, que es abierto y cerrado en el subespacio $(f(A), d')$.

En virtud de los Teoremas 1 y 2 de 2.6, existe un conjunto T_1, abierto en (F, d') y un conjunto T_2 cerrado en (F, d') tales que

$$S = T_1 \cap f(A) = T_2 \cap f(A).$$

Ahora bien, como f es continua en A, $f^{-1}(T_1)$ es abierto en el subespacio (A, d) y $f^{-1}(T_2)$ es cerrado en (A, d). Pero es claro que

$$f^{-1}(T_1) = f^{-1}(T_2) = f^{-1}(S)$$

o sea que $f^{-1}(S)$ es abierto y cerrado en el subespacio (A, d); no es vacío, ya que $\phi \neq S \subset f(A)$, y tampoco es igual a A, porque $S \neq f(A)$.

Resulta entonces que A es disconexo, lo cual es una contradicción.

Puede suceder, sin embargo, que f sea continua en un conjunto disco nexo A y que $f(A)$ sea conexo. Tal es el caso si f es una función constante; $f(A)$ es siempre conexo, por estar constituido por un solo punto, con independencia de la naturaleza de A.

El teorema precedente junto con el Teorema 1 de 3.5, según el cual los únicos conjuntos conexos en la recta real son los intervalos, origina toda una cadena de consecuencias cuando hacemos intervenir la recta real. A continuación presentamos una lista de tales proposiciones, omitiendo las demostraciones cuando son inmediatamente evidentes y agregando consideraciones pertinentes para casos significativos.

C_1) Si $f : A \subset E \to R$ es continua en el conjunto conexo A, entonces $f(A)$ es un intervalo.

C_2) Si $f : I \subset R \to R$ es continua en el intervalo I, entonces $f(I)$ es un intervalo.

Esto se expresa, sugestivamente, diciendo que la imagen continua de un intervalo es un intervalo. Es claro que se trata de un caso particular de C_1.

C_3) Si $f : A \subset E \to R$ es continua en el conjunto conexo y compacto A, entonces $f(A)$ es un intervalo cerrado y acotado.

Por C_1 sabemos que $f(A)$ es un intervalo y, por el Teorema 1 de 6.3, también compacto, por lo tanto cerrado y acotado (corolarios 1′ y 2′ de 4.3).

C_4) Si $f : [a, b] \subset R \to R$ es continua en $[a, b]$, su rango es un intervalo cerrado y acotado.

Se trata evidentemente, de un caso particular de C_3, ya que $[a, b]$ es conexo y compacto.

C_5) Sea $f : A \subset E \to R$ continua en el conjunto conexo A. Si para $a, b \in A$ se tiene que $f(a) < f(b)$ y c' es un número real con $f(a) < c' < f(b)$, entonces existe un $c \in A$ tal que $f(c) = c'$.

En efecto, por C_1, $f(A)$ es un intervalo y es claro que $f(a), f(b) \in f(A)$; luego, en virtud de la definición de intervalo, $c' \in f(A)$, lo cual implica la existencia de un $c \in A$ (no necesariamente único) con $f(c) = c'$.

Esta proposición C_5 es particularmente importante y sugestiva; suele llamarse "propiedad D" de las funciones continuas, en honor a Dedekind, a quien se atribuye la primera demostración rigurosa. Puede expresarse de manera imprecisa, pero llamativa, diciendo que "una función continua pasa de un valor a otro tomando todos los valores intermedios".

Se percibe que esta propiedad D refleja, con gran fidelidad, nuestra idea intuitiva de "continuidad": el paso continuo, sin saltos, de un punto a otro.

Cabe destacar, sin embargo, que existen funciones no continuas que cumplen con la propiedad D, vale decir, cuyo rango es un intervalo. Significa esto que dicha propiedad no puede adoptarse como definición de continuidad, por más que corresponda a la noción intuitiva del término; ello explica, en parte, la dificultad y tiempo que tomó a los matemáticos para arribar a la definición satisfactoria del concepto.

C_6) Si $f : A \subset E \to R$ es continua en el conjunto conexo A y, para un par de puntos $a, b \in A$, $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos (o sea $f(a) \cdot f(b) < 0$), entonces existe un $c \in A$ con $f(c) = 0$.

Es un caso trivialmente particular de C_5, ya que la hipótesis señala que 0 está comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, no obstante, sus importantes aplicaciones justifican destacarlo. Su utilidad tradicional se presenta cuando, particularizando más aún, el espacio (E, d) es también la recta real y A es un intervalo (forzosamente, ya que ha de ser conexo). Esta versión suele atribuirse a Bolzano; se aplica como fundamento para diseñar algoritmos iterativos numéricos para resolver ecuaciones de la forma $f(x) = 0$, donde f es continua y x toma valores reales. Tales procedimientos de aproximaciones sucesivas son muy rápidos y efectivos con el auxilio de modernas máquinas de calcular que realicen, a gran velocidad, las tediosas operaciones aritméticas necesarias. La consideración de estos temas invade el área del Cálculo Numérico, la cual es ajena a los propósitos de esta obra. El lector interesado puede consultar, entre la abundante literatura sobre la rama, el excelente texto de P. Henrici, *Elements of Numerical Analysis* (Wiley).

C_7) Un conjunto conexo A constituido por más de un punto, en un espacio (E, d), no es contable.

En efecto, tomemos un punto $a \in A$ y definamos la función $f : A \subset E \to R$, tal que $\forall x \in A : f(x) = d(x, a)$. Ahora bien, f es conti-

nua en el conjunto conexo A, lo cual implica (C_1) que su rango $f(A)$ es un intervalo. Además, como A consta de más de un punto, existe un $b \in A$ con $b \neq a$, de donde

$$f(b) = d(a, b) \neq 0 = f(a).$$

Esto indica que el intervalo $f(A)$ consta de más de un punto, por lo cual sus extremos no son coincidentes y $f(A)$ no es contable (véase el párrafo final de 5.6).

Se concluye que si A fuese contable, también lo sería $f(A)$.

En particular, si un espacio (E, d) es conexo y contiene más de un punto, E no es contable.

C_8) Ya hemos señalado en C_5 que la "propiedad D" no caracteriza a las funciones continuas, pero sí proporciona una útil caracterización de los conjuntos conexos. Concretamente:

Un conjunto A, en un espacio (E, d) es conexo si y sólo si el rango de toda función $f : A \subset E \to R$, continua en A, es un intervalo.

En efecto, si A es conexo la propiedad no es otra que C_1. Recíprocamente, supongamos que A es disconexo y construyamos una función de A en R, continua en A y cuyo rango no sea un intervalo.

Como A es disconexo, existen conjuntos no vacíos S, T, disjuntos, abiertos en el subespacio (A, d) y $A = S \cup T$. Definamos la función $f : A \subset E \to R$ tal que $\forall x \in A : f(x) = 0$, si $x \in S$; $f(x) = 1$, si $x \in T$.

Haciendo uso del Teorema 2 de 6.2, sea U un conjunto abierto en la recta real, entonces $f^{-1}(U)$ será uno solo de los conjuntos ϕ, S, T, A, según U no contenga 0 ni 1, contenga a 0 y no a 1, a 1 y no a 0 ó contenga a 0 y 1, respectivamente. Observamos que, en todo caso, $f^{-1}(U)$ es abierto en (A, d).

Resulta pues que f es continua en A y su rango es el conjunto $\{0, 1\}$ que no es un intervalo.

C_9) Si $f : R \to R$ es biyectiva y continua en R, entonces f^{-1} es también continua en R (f es un homeomorfismo).

Primeramente, veamos que la imagen de un intervalo abierto, bajo f, es un intervalo abierto.

En efecto, tomemos un $I = (a, b)$. En virtud de (C_4), $f[a, b] = [m, M]$, de donde, aprovechando la biyectividad de f,

$$f(I) = [m, M] - \{f(a), f(b)\};$$

pero $f(I)$ es un intervalo (C_2), o sea que, forzosamente,

$$f(I) = (m, M).$$

Ahora bien, todo conjunto abierto A, en la recta real, es la unión en una familia F de intervalos abiertos (Teorema 2 de 3.5):

$$A = \bigcup_{I \in F} I,$$

lo cual implica que $f(A) = \bigcup_{I \in F} f(I)$, donde cada $f(I)$ es un intervalo abierto, por lo establecido anteriormente, y por lo tanto $f(A)$ es un conjunto abierto (Teorema 3 de 2.2). El Teorema 2 de 6.2 nos dice entonces que f^{-1} es continua en R.

Este interesante resultado es también cierto para el espacio R^n en lugar de la recta real, aunque allí la demostración es apreciablemente más sofisticada y se realiza usualmente al estudiar Topología Algebraica; no estimamos prudente incluirla aquí. La propiedad no es, por otra parte, generalizable a espacios métricos cualesquiera, aun exigiendo condiciones tales como completitud; ello se debe a que se trata de una consecuencia de peculiaridades muy propias de R^n. No obstante, recordemos que si el espacio es compacto la propiedad se cumple (Teorema 2 de 6.3).

6.5. ARCO-CONECTIVIDAD

Procedemos a estudiar un nuevo tipo de conectividad algo más especializada que la empleada hasta ahora; su ubicación en este capítulo obedece a que su definición requiere el concepto de función continua. Le daremos el nombre de arco-conectividad y veremos que, además de su interés intrínseco, nos servirá para obtener resultados significativos en el capítulo siguiente; por otra parte, su importancia en diversas ramas de la Matemática es considerable.

El lector notará un claro paralelismo con el capítulo III sobre conectividad, ya que hay lugar a la introducción de conceptos análogos.

Comenzamos con una definición fundamental.

Un *arco* en un espacio métrico (E, d) es el rango de una función $f : [0,1] \subset R \to E$, continua en el intervalo $[0, 1]$. Puede expresarse, de manera imprecisa, diciendo que un arco es la imagen continua de un intervalo.

Intuitivamente es claro que la definición de arco traduce la idea que nos representa la palabra.

Teniendo en cuenta que un intervalo cerrado es un conjunto conexo y compacto y aplicando el Teorema 1 de 6.4 y el Teorema 1 de 6.3, concluimos que un arco es siempre un conjunto conexo y compacto.

El ejemplo más sencillo lo constituye un conjunto $\{a\}$ de un solo punto de (E, d). La función constante $f : [0, 1] \to E$, tal que $\forall t \in [0, 1] : f(t) = a$, es evidentemente continua en $[0, 1]$ y su rango es $\{a\}$ que es, por lo tanto, un arco.

En lo que sigue y en el capítulo próximo tendremos oportunidad de considerar otros ejemplos.

Dada una función $f : [0, 1] \to E$, continua en $[0, 1]$, conviene, con frecuencia, referirse al rango $f[0,1]$ como el *arco descrito por* f, cuando se desea distinguir la función que determina el arco, la cual, por cierto, no es necesariamente única. A los puntos $f(0)$, $f(1) \in E$ se les llama *extremos* del arco; también se dice que dichos puntos están *unidos por un arco*.

Podemos ahora definir:

Se dice que un conjunto no vacío A, en un espacio (E, d) es *arco conexo* si para todo par de puntos $x, y \in A$, x y y están unidos por un arco *contenido en* A.

Cabe destacar que dos puntos de un espacio pueden estar unidos por muchos arcos distintos (o por ninguno).

Un ejemplo trivial de conjunto arco-conexo es el constituido por un solo punto; veremos muchos más en lo que sigue.

Resulta oportuno establecer de una vez que arco-conectividad es una propiedad topológica, es decir, es invariante respecto a una transformación continua. Dicho de otra manera, la imagen continua de un conjunto arco-conexo es arco-conexa.

Teorema 1. Si $f : A \subset E \to F$ es continua en el conjunto arco-conexo A, entonces su rango $f(A)$ es arco-conexo.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos $x', y' \in f(A)$. Deben existir $x, y \in A$ con $f(x) = x'$, $f(y) = y'$.

Ahora bien, A es arco-conexo, luego existe una función $g : [0,1] \to E$, continua en $[0, 1]$, cuyo rango (un arco) está contenido en A y con $g(0) = x$, $g(1) = y$.

Definamos la función $h : [0, 1] \to F$ tal que $h = f \circ g$, lo cual es posible, ya que el rango de g está contenido en el dominio A de f. En virtud del Teorema 1 de 6.2, h es continua en $[0, 1]$. Por otra parte, el rango de h está obviamente contenido en $f(A)$ y $h(0) = f[g(0)] = f(x) = x'$, $h(1) = f[g(1)] = f(y) = y'$.

En resumen, hemos hallado un arco (descrito por h), contenido en $f(A)$ y que une los puntos x', y'.

Ocurre de inmediato preguntarse qué relación existe entre conectividad y arco-conectividad. Comenzamos por responder a la mitad de la pregunta.

Teorema 2. En un espacio métrico, todo conjunto arco-conexo es conexo.

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia del hecho de que un arco es un conjunto conexo.

Sea A un conjunto arco-conexo del espacio y tomemos un punto $a \in A$. Para todo punto $x \in A$ existe un arco S_x de extremos a, x, de donde $a, x \in S_x$, y con $S_x \subset A$.

Es inmediato que

$$A = \bigcup_{x \in A} S_x;$$

además, los conjuntos S_x son conexos y su intersección no es vacía, ya que a pertenece a todos ellos. Su unión, o sea A, es, pues, conexa, en virtud del corolario 2′ de 3.2.

El teorema precedente es intuitivamente sensato al tener presente que un arco es "de una sola pieza" (conexo) y que dos puntos cualesquiera del conjunto son extremos de un arco. Si el conjunto fuese disconexo podríamos distinguirle dos partes "separadas" y resultaría imposible unir puntos de una y otra mediante un arco sin "romperlo". Lo que quizá resulte algo desconcertante es que el recíproco no es, en general, cierto y, probablemente por eso, los contra-ejemplos son complicados (véase el ejercicio 36). No obstante, más adelante veremos que, con imposición de hipótesis adicionales, un conjunto conexo es arco-conexo. En todo caso, se ha puesto de manifiesto que la arco-conectividad es una propiedad más fuerte, especializada y exigente que la conectividad.

Como de costumbre, diremos que el espacio métrico (E, d) es arco-conexo si E es arco-conexo. Veamos, por ejemplo, que tal es el caso de la recta real, también con el propósito de investigar la arco-conectividad en ese espacio. Primeramente, por definición de arco y por C_4 de 6.4, un arco en la recta real es un intervalo cerrado y acotado.

Sean $p, q \in R$ y definamos la función $f : R \to R$ tal que $\forall t \in R : f(t) = pt + q$. Es inmediato que f es continua en R; basta con observar la igualdad: $|f(t) - f(t')| = |p| \cdot |t - t'|$. De esto deducimos que dos puntos cualesquiera $a, b \in R$ están unidos por un arco descrito por $f : [0, 1] \to R$, donde $\forall t \in [0, 1] : f(t) = a + t(b - a)$, cuyo rango (el arco) es el intervalo $[a, b]$. La recta real es pues, un espacio arco-conexo. Pero hemos establecido algo más: si un conjunto A, en la recta real, posee la propiedad de que $\forall a, b \in A : [a, b] \subset A$, entonces A es arco-conexo; pero esto significa que todo intervalo es arco-conexo. Recíprocamente, por el Teorema 2, un conjunto arco-conexo es conexo y, por tanto (Teorema 1 de 3.5), un intervalo.

En resumen, la recta real es un espacio arco-conexo y sus únicos conjuntos arco-conexos son los intervalos. Se ve, pues, que en la recta real, conectividad y arco-conectividad son una y la misma cosa. Esto trae como consecuencia, considerando la definición de arco y el Teorema 1, que un arco es un conjunto arco-conexo.

El lema siguiente probará ser de mucha utilidad.

Lema 1. Sobre un conjunto no vacío A, en un espacio (E, d), se define una relación binaria $\overset{A}{\sim}$ tal que, para $x, y \in A$, $x \overset{A}{\sim} y$ significa que x está unido a y por un arco contenido en A. Entonces $\overset{A}{\sim}$ es una relación de equivalencia sobre A.

Demostración. La reflexividad y simetría de $\overset{A}{\sim}$ son evidentes.

Nótese que no hacemos distinción alguna entre los dos extremos de un arco, aunque, en todo caso, es indiferente. En efecto, supongamos que, para un par $x, y \in A$, $x \overset{A}{\sim} y$; existe pues una función $f : [0, 1] \to E$, continua en $[0, 1]$, cuyo rango (el arco que une x, y) está contenido en A y con $f(0) = x$, $f(1) = y$. Sabemos que la función $g : [0, 1] \to R$, tal que $\forall t \in [0, 1] : g(t) = 1 - t$ es continua en $[0, 1]$ y su rango es $[0, 1]$; entonces la función $f \circ g : [0, 1] \to E$ es continua en $[0, 1]$ (Teorema 1 de 6.2), su rango (un arco) está contenido (coincide) en el de f y, por tanto, en A, obteniéndose $f \circ g(0) = y$, $f \circ g(1) = x$.

Demostremos la transitividad de $\overset{A}{\sim}$. Sean $x, y, z \in A$ con $x \overset{A}{\sim} y$, $y \overset{A}{\sim} z$. Lo que acaba de establecerse permite suponer la existencia de funciones $f, g : [0, 1] \to E$, ambas continuas en $[0, 1]$, sus rangos contenidos en A y $f(0) = x$, $f(1) = y = g(0)$, $g(1) = z$.

La función $\varphi : [1, 2] \to R$, tal que $\forall t \in [1, 2] : \varphi(t) = t - 1$, es continua en $[1, 2]$ y su rango es claramente $[0, 1]$.

Definamos la función $h : [0, 2] \to E$ tal que $\forall t \in [0, 2]$, si $t \in [0, 1] : h(t) = f(t)$, si $t \in [1, 2] : h(t) = g \circ \varphi(t)$. h está bien definida, ya que $h(1) = f(1) = g \circ \varphi(1) = g(0) = y$.

Demostrar que h es continua en $[0, 2]$ requiere cierto cuidado. Tendremos que considerar todos los casos.

Tomemos un $t_0 \in [0, 2]$ y probemos que h es continua en t_0. Supongamos primero que $t_0 \in [0, 1)$, entonces $h(t_0) = f(t_0)$. Dado $\varepsilon > 0$, como f es continua en t_0, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\forall t \in [0, 1] \text{ con } |t - t_0| < \delta : d(f(t), f(t_0)) < \varepsilon.$$

Elegimos un número real δ_1, con $0 < \delta_1 < 1 - t_0$; entonces sea $\delta' = \text{mín}\{\delta, \delta_1\}$. Luego, $\forall t \in [0, 2]$ con $|t - t_0| < \delta'$ resulta que $|t - t_0| < \delta$ y $t < t_0 + \delta_1 < 1$, de donde $t \in [0, 1)$, y: $d(h(t), h(t_0)) < \varepsilon$, ya que también $h(t) = f(t)$. En resumen, h es continua en $[0, 1)$.

Si $t_0 \in (1, 2]$, $h(t_0) = g \circ \varphi(t_0)$ y, considerando que $g \circ \varphi$ es continua en t_0, un razonamiento totalmente análogo establece que h es continua en t_0 y por tanto, en $(1, 2]$.

Resta probar que h es continua en el punto 1, donde

$$h(1) = f(1) = g \circ \varphi(1) = y.$$

Dado $\varepsilon > 0$, como f, $g \circ \varphi$ son continuas en 1, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$\forall t \in [0, 1] \text{ con } |t-1| < \delta_1 : d(f(t), y) < \varepsilon$$
$$\forall t \in [1, 2] \text{ con } |t-1| < \delta_2 : d(g \circ \varphi(t), y) < \varepsilon.$$

Ahora bien, si designamos $\delta = \text{mín}\ \{\delta_1, \delta_2\}$ y tenemos presente la definición de h, resulta

$$\forall t \in [0, 2] \text{ con } |t-1| < \delta : d(h(t), y) < \varepsilon$$

y h es continua en 1.

En definitiva, h es continua en $[0, 2]$, pero este intervalo es un conjunto arco-conexo y, por el Teorema 1, el rango S de h es arco-conexo. Es claro que $S \subset A$, en virtud de la definición de h. Por otra parte, $x, z \in S$, ya que $h(0) = x$, $h(2) = z$. Se deduce que x, z, están unidos por un arco contenido en S y, por consiguiente, en A, es decir, $x \overset{A}{\sim} z$. ●

Es natural proceder a considerar el conjunto cociente y demás entes determinados por una relación de equivalencia, pero antes resulta más sencillo y porductivo establecer un teorema y su corolario que son los análogos del Teorema 2 y corolario 2′ de 3.2. Por cierto que, al aludir a la sección 3.2, cabe preguntarse si su Teorema 1 y corolario 1′ también tienen sus análogos en arco-conectividad. Desafortunadamente no es así y, en tal sentido, véase el ejercicio 36.

Teorema 3. Sea F una familia de conjuntos arco-conexos de (E, d).

Si existe un $A_0 \in F$ tal que

$$\forall A \in F : A \cap A_0 \neq \phi,$$

entonces

$$B = \bigcup_{A \in F} A$$

es arco-conexo.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos un par de puntos cualesquiera $x, z \in B$.

Empleando la notación del lema 1, basta con demostrar que $x \overset{B}{\sim} z$.

Deben existir conjuntos $A_1, A_2 \in F$ con $x \in A_1$, $z \in A_2$. Ahora bien, haciendo uso de la hipótesis, existen puntos $y_1 \in A_1 \cap A_0$, $y_2 \in A_2 \cap A_0$; pero entonces $x, y_1 \in A_1$, $y_1, y_2 \in A_0$, $z, y_2 \in A_2$ y, como todos estos conjuntos son arco-conexos, cada par está unido por un arco contenido en el conjunto al cual pertenecen los puntos, pero $A_0, A_1, A_2 \subset B$, luego todos esos arcos están contenidos en B. En definitiva tenemos: $x \overset{B}{\sim} y_1$, $y_1 \overset{B}{\sim} y_2$, $y_2 \overset{B}{\sim} z$, lo cual implica, por la transitividad de $\overset{B}{\sim}$ (lema 1) que $x \overset{B}{\sim} z$.

Corolario 3'. Si F es una familia de conjuntos arco-conexos de (E, d) tal que $\bigcap_{A \in F} A \neq \phi$, entonces $\bigcup_{A \in F} A$ es arco-conexo.

Este corolario nos permite proseguir de manera análoga a 3.3 y definir los componentes arco-conexos de un conjunto. Resultarán ser, como allá, los "máximos" conjuntos arco-conexos.

Sea A un conjunto no vacío en un espacio (E, d). Tomemos un punto $x \in A$ y consideremos la familia de todos los conjuntos arco-conexos que contienen a x y están contenidos en A. Dicha familia no es vacía, ya que contiene al conjunto $\{x\}$, y su intersección tampoco es vacía, sabiendo que x pertenece a todos sus miembros. Se infiere pues, por el corolario 3', que la unión en esa familia es un conjunto arco-conexo $a(x)$ que llamaremos *componente arco-conexo* de A. Es claro que si B es un conjunto arco-conexo con $x \in B \subset A$, entonces B es miembro de la familia cuya unión es $a(x)$, lo cual implica que $B \subset a(x)$. Esta propiedad revela la "maximalidad" de $a(x)$.

Llamamos *componentes arco-conexos del espacio* a los componentes arco-conexos del conjunto E.

En virtud del Teorema 2, todo componente arco-conexo $a(x)$ de A es un conjunto conexo, por lo cual se deduce (véase 3.3) que $a(x) \subset C(x)$, donde $C(x)$ es el componente conexo de A que contiene a x.

Es evidente que

$$A = \bigcup_{x \in A} a(x)$$

y, por un razonamiento idéntico al empleado en 3.3, los componentes arco-conexos de A son disjuntos dos a dos. Ellos constituyen, pues, una partición del conjunto A, la cual determina una relación de equivalencia tal que los puntos $x, y \in A$ están relacionados si y sólo si pertenecen al mismo componente arco-conexo y las clases de equivalencia son, por supuesto, los componentes arco-conexos.

Supongamos que los puntos $x, y \in A$ pertenecen ambos al mismo componente arco-conexo $a(x)$ de A, entonces x, y están unidos por un arco

contenido en $a(x)$ y, por tanto, en A; luego $x \overset{A}{\sim} y$, empleando la notación del lema 1. Recíprocamente, consideremos que para un par de puntos $x, y \in A$ se tiene $x \overset{A}{\sim} y$. Esto significa que x, y están unidos por un arco S (de donde $x, y \in S$) contenido en A, pero S es arco-conexo, lo cual implica que $S \subset a(x)$, o sea $x, y \in a(x)$.

En resumen, dos puntos $x, y \in A$ pertenecen al mismo componente arco-conexo si y sólo si $x \overset{A}{\sim} y$. Dicho de otra manera, hemos establecido que la relación de equivalencia determinada por la partición de A en sus componentes arco-conexos no es otra cosa que $\overset{A}{\sim}$. Esta conclusión completa lo suscitado en el lema 1.

Es inmediato (al igual que en 3.3) que A es arco-conexo si y sólo si admite un único componente arco-conexo.

Al contrario de componentes conexos, los componentes arco-conexos de A no son, en general, cerrados en el subespacio (A, d). Ello se debe a que la clausura de un conjunto arco-conexo no es siempre arco-conexo.

Continuando con el paralelismo al capítulo III, decimos que un espacio métrico (E, d) es *localmente arco-conexo* si para todo punto $x \in E$ y todo entorno S de x, existe un entorno T de x tal que $T \subset S$ y T es arco-conexo.

De nuevo (véase 3.4), la arco-conectividad y arco-conectividad local del espacio son conceptos lógicamente independientes.

Sabiendo, por el Teorema 2, que todo conjunto arco-conexo es conexo, deducimos que un espacio localmente arco-conexo es localmente conexo. El recíproco no es, en general, cierto.

Hemos visto que, en el caso muy particular de la recta real, un conjunto es arco-conexo si y sólo si es conexo, lo cual equivale a ser un intervalo; es decir, que siendo la conectividad y arco-conectividad la misma cosa, la recta real es un espacio arco-conexo y localmente arco-conexo. De todas formas esto es consecuencia del siguiente teorema, cuya demostración omitimos por ser idéntica a la del Teorema 1 de 3.4, substituyendo conexo por arco-conexo.

Teorema 4. Si en (E, d) toda esfera abierta es un conjunto arco-conexo, entonces (E, d) es un espacio arco-conexo y localmente arco-conexo.

Tal es el caso de un espacio normado, como veremos en el capítulo siguiente.

El próximo teorema, idéntico en enunciado y demostración al Teorema 2 de 3.4, substituyendo el término conexo por arco-conexo, proporciona una elegante y útil caracterización de la arco-conectividad local.

Teorema 5. Un espacio métrico (E, d) es localmente arco-conexo si y sólo si los componentes arco-conexos de todo conjunto abierto son abiertos.

Este teorema da cabida a un recíproco parcial del Teorema 2, de gran interés y utilidad. Nótese que las hipótesis adicionales requeridas para garantizar que un conjunto conexo sea arco-conexo son exigentes.

Teorema 6. Si A es un conjunto abierto y conexo, en un espacio localmente arco-conexo (E, d), entonces A es arco-conexo.

DEMOSTRACIÓN. Sea C un componente arco-conexo de A. En virtud del Teorema 5, C es abierto en (E, d) y, como $C \subset A$, C es abierto en el subespacio (A, d).

Tomemos ahora un $x \in A \cap \overline{C}$ y sea $a(x)$ el componente arco-conexo de A que contiene a x. De nuevo por el Teorema 5, $a(x)$ es un conjunto abierto y, por tanto, un entorno de x. Pero $x \in \overline{C}$; luego, por el Teorema 2 de 2.4, $C \cap a(x) \neq \phi$, lo cual implica que $C = a(x)$, ya que los componentes son disjuntos o coincidentes, de donde $x \in C$.

Hemos establecido que $A \cap \overline{C} \subset C$; pero también es cierto que $C = A \cap C \subset A \cap \overline{C}$. Luego $C = A \cap \overline{C}$, o sea que C es cerrado en el subespacio (A, d) (Teorema 2 de 2.6).

En resumen, el conjunto no vacío (por ser un componente) C es abierto y cerrado en el subespacio (A, d). Pero A es conexo, luego $C = A$ (véase 3.1) y A es un conjunto arco-conexo. ▲

Las condiciones de que A sea abierto y el espacio localmente arco-conexo no son, evidentemente, necesarias, ya que, en cualquier espacio, existen conjuntos arco-conexos y por tanto conexos (Teorema 2) que no son abiertos.

6.6. CONTINUIDAD UNIFORME

Introduciremos un nuevo e importante concepto que es algo más poderoso que la continuidad de una función en un conjunto.

Supongamos que una función $f : A \subset E \to F$ es continua en el conjunto A; o sea que, si tomamos un $a \in A$ cualquiera, f es continua en ese punto. Luego, dado un $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in A \text{ con } d(x, a) < \delta : d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Ahora bien, es claro que δ depende de ε, pero también es cierto que, en general, δ depende del punto a. No tenemos derecho a suponer que el mismo δ (conservando ε fijo) sirva para todos los puntos de A, en el sentido

dado arriba. Cuando eso sí sucede, es decir, δ depende sólo de ε y es independiente del punto en cuestión, decimos que f es uniformemente continua en A.

De manera más precisa:

Se dice que la función $f : A \subset E \to F$ es *uniformemente continua en el conjunto* A si a cada $\varepsilon > 0$ corresponde un $\delta > 0$ tal que $\forall x, y \in A$ con $d(x, y) < \delta : d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Es obvio que, si f es uniformemente continua en A, entonces f es continua en A. El recíproco no es, en general, cierto (véase el ejercicio 43), lo cual revela que la continuidad uniforme es una propiedad (¡global!) más poderosa que la continuidad en un conjunto. Luego veremos bajo qué condiciones adicionales la continuidad se hace uniforme.

La definición es fácilmente interpretada intuitivamente. El ejemplo más sencillo es el de una función constante $f : A \subset E \to F$, donde $\forall x, y \in A$: $f(x) = f(y)$, en cuyo caso $d'(f(x), f(y)) = 0$ siempre y cualquier $\delta > 0$ satisface la definición.

La función idéntica $j : A \subset E \to E$, tal que $\forall x \in A : j(x) = x$, es uniformemente continua en A; ya que $\forall x, y \in A : d(j(x), j(y)) = d(x, y)$, de manera que, dado $\varepsilon > 0$, basta con tomar $\delta = \varepsilon$.

Más general que ambos ejemplos anteriores, se dice que la función $f : A \subset E \to F$ satisface una *condición de Lipschitz en* A si existe un número real $k > 0$ tal que

$$\forall x, y \in A : d'(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Es inmediato que f es uniformemente continua en A: dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta = \varepsilon/k$.

No debe creerse, sin embargo, que toda función uniformemente continua satisface una condición de Lipschitz. Lo pondremos de manifiesto aplicando el siguiente ejemplo. Si (E, d) es un espacio métrico discreto, cualquier función $f : A \subset E \to F$ es uniformemente continua en A (no importa cuál sea A). En efecto, al tomar $\delta = 1$ se verifica $\forall x, y \in A$ con $d(x, y) < \delta$, necesariamente $x = y$, de donde $d'(f(x), f(y)) = 0$. Sin embargo, en estos casos la función f no siempre satisface una condición de Lipschitz. Sea, por ejemplo, la función idéntica $j : E \to F$, donde (E, d) es el espacio métrico constituido por el conjunto de los números reales y la métrica discreta y (F, d') es la recta real; j es entonces uniformemente continua en E. Si existe un $k > 0$ tal que $\forall x, y \in E : d'(j(x), j(y)) = |x-y| \leq kd(x, y)$, tomemos $x \in E$ con $x > k$, $y = 0$; entonces $x = |x-0| \leq kd(x, 0) = k$ que es una contradicción. O sea que j no satisface una condición de Lipschitz en E. Este interesante ejemplo revela un hecho que conviene tener presente:

la imagen de un conjunto acotado, bajo una función uniformemente continua en él, no es, en general, acotada. Nótese que E es un conjunto acotado, pero $j(E) = F$ no lo es.

Consideremos ahora un espacio métrico cualquiera (E, d), tomemos un punto $a \in E$ y definamos la función $f : E \to R$ tal que

$$\forall x \in E : f(x) = d(x, a).$$

Aplicando el lema 1 de 1.1 se verifica

$$\forall x, y \in E : |f(x) - f(y)| = |d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y),$$

o sea que f satisface una condición de Lipschitz en E $(k = 1)$ y es, por consiguiente, uniformemente continua en E.

Más general, tomando un conjunto no vacío A de (E, d) definimos $g : E \to R$ tal que

$$\forall x \in E : g(x) = d(x, A).$$

Empleando ahora lo establecido en 1.2,

$$\forall x, y \in E : |g(x) - g(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y),$$

y g es uniformemente continua en E por idéntica razón a la del ejemplo anterior.

El compuesto de funciones uniformemente continuas es una función continua, tal como se infiere del Teorema 1 de 6.2, pero podemos asegurar algo más.

Teorema 1. Sean (E, d), (F, d'), (G, d'') espacios métricos, $f : A \subset E \to F$, $g : B \subset F \to G$ con $f(A) \subset B$.

Si f es uniformemente continua en A, y g es uniformemente continua en $f(A)$, entonces $g \circ f$ es uniformemente continua en A.

DEMOSTRACIÓN. La hipótesis $f(A) \subset B$ nos permite considerar la función compuesta $g \circ f : A \subset E \to G$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta' > 0$ tal que

$$\forall x', y' \in f(A) \text{ con } d'(x', y') < \delta' : d''(g(x'), g(y')) < \varepsilon \qquad (1)$$

Ahora bien, a $\delta' > 0$ corresponde un $\delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in A \text{ con } d(x, y) < \delta : d'(f(x), f(y)) < \delta',$$

de donde, sabiendo que $f(x), f(y) \in f(A)$ y aplicando (1), obtenemos

$$d''(g \circ f(x),\ g \circ f(y)) < \varepsilon.$$

Siendo la continuidad uniforme una propiedad global, ésta se refiere siempre a un conjunto, que puede ser el dominio de la función o un subconjunto de él, y ello justifica el siguiente resultado, bastante obvio.

Corolario 1'. Si $f : A \subset E \to F$ es uniformemente continua en A y B es un conjunto no vacío con $B \subset A$, entonces f es uniformemente continua en B.

DEMOSTRACIÓN. La función idéntica $j : B \subset E \to E$, tal que

$$\forall x \in B : j(x) = x,$$

es uniformemente continua en B.

Por otra parte, la función $f : B \subset E \to F$ es formalmente $f \circ j$ que es uniformemente continua, por el Teorema 1, en el conjunto B.

Es claro que toda propiedad de las funciones continuas se cumple (*a fortiori*) para las uniformemente continuas, en particular, lo referente a imágenes de conjuntos compactos y conexos. Pero, teniendo en cuenta que la continuidad uniforme es más fuerte que la continuidad, es de esperar que determinadas propiedades que no resultan invariantes con respecto a una transformación continua sí lo sean cuando aquella es uniforme. Ya hemos visto que la imagen uniformemente continua de un conjunto acotado no es, en general, acotada; aunque para conjuntos precompactos sucede lo propio, como veremos en seguida. No ocurre así para una función que es sólo continua (ejercicio 43).

Teorema 2. Si $f : A \subset E \to F$ es uniformemente continua en el conjunto precompacto A, entonces su rango $f(A)$ es precompacto.

DEMOSTRACIÓN. Dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in A \text{ con } d(x,y) < \delta : d'(f(x), f(y)) < \varepsilon. \qquad (1)$$

Ahora bien, como A es precompacto, a $\delta > 0$ corresponde un conjunto finito de puntos $x_1, x_2, \cdots, x_n \in A$ tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(x_i; \delta). \qquad (2)$$

De allí se deduce que

$$f(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(f(x_i);\varepsilon),$$

o sea que $f(A)$ es precompacto. En efecto, para un punto cualquiera $y \in f(A)$, existe un $x \in A$ con $f(x) = y$, pero, por (2), $x \in N(x_i;\delta)$, para algún $i = 1, 2, \cdots, n$, lo cual implica que $d(x, x_i) < \delta$; luego, en virtud de (1) $d'(f(x), f(x_i)) < \varepsilon$, es decir,

$$y = f(x) \in N(f(x_i);\varepsilon).$$

No debe creerse que la propiedad del teorema precedente caracteriza las funciones uniformemente continuas. Más aún, f puede ser continua en el conjunto precompacto A, con $f(A)$ precompacto, sin ser uniformemente continua en A, en tal sentido véase el ejercicio 44.

El teorema 2 de 6.1 nos dice que la imagen continua de una sucesión convergente es también convergente. Veamos ahora que tal propiedad se aplica a las sucesiones de Cauchy si la continuidad es uniforme.

Teorema 3. Si $f : A \subset E \to F$ es uniformemente continua en A y $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en A, entonces $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en $f(A)$.

DEMOSTRACIÓN. Dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in A \text{ con } d(x, y) < \delta : d'(f(x), f(y)) < \varepsilon. \qquad (1)$$

Ahora bien, a $\delta > 0$ corresponde un $\nu \in N$ tal que

$$\forall n, n' \geq \nu : d(x_n, x_{n'}) < \delta,$$

de donde, aplicando (1), obtenemos $d'(f(x_n), f(x_{n'})) < \varepsilon$, siempre que $n, n' \geq \nu$, y $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy.

Nótese que no viene al caso si las sucesiones de Cauchy que intervienen en el teorema precedente son convergentes o no. Por otra parte, es interesante observar que, si el espacio (F, d') es completo, la función "transporta" sucesiones de Cauchy a sucesiones convergentes.

Pasamos ahora a demostrar un famoso e importantísimo teorema, atribuido a Heine. En esencia, establece que si a continuidad añadimos la hipótesis de compacidad del dominio, ésta se hace uniforme.

Teorema 4. (Heine). Si $f: A \subset E \to F$ es continua en el conjunto compacto A, entonces f es uniformemente continua en A.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada punto $a \in A$, como f es continua en él, existe un $r > 0$, que corresponde a $\varepsilon/2$, tal que

$$\forall x \in A \cap N(a; r) : d'(f(x), f(a)) < \varepsilon/2. \tag{1}$$

Ahora bien, la familia de esferas $N(a; r/2)$, para todo $a \in A$, es, evidentemente, una cobertura abierta del conjunto compacto A. Existen entonces esferas $N(a_1; r_1/2), N(a_2; r_2/2), \ldots, N(a_n; r_n/2)$ tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(a_i; r_i/2). \tag{2}$$

Sea

$$\delta = \text{mín}\,\{r_1/2, r_2/2, \ldots, r_n/2\}.$$

Resulta ahora que,

$$\forall x, y \in A \text{ con } d(x, y) < \delta,$$

debe tenerse que (por (2)) $x \in N(a_i; r_i/2)$ (para algún $i = 1, 2, \ldots, n$), de donde

$$d(y, a_i) \leq d(x, y) + d(x, a_i) < \delta + r_i/2 \leq r_i;$$

o sea que $x, y \in A \cap N(a_i; r_i)$, lo cual implica, en virtud de (1), que

$$d'(f(x), f(a_i)) < \varepsilon/2, \; d'(f(y), f(a_i)) < \varepsilon/2;$$

luego,

$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f(a_i)) + d'(f(y), f(a_i)) < \varepsilon.$$

Ciertamente que la compacidad del dominio no es una condición necesaria, ya que existen funciones uniformemente continuas en dominios cualesquiera.

La hipótesis sobre el dominio puede hacerse menos restrictiva, pero a costo de una nueva exigencia sobre la función con objeto de garantizar su continuidad uniforme, tal como se plantea en el siguiente resultado.

Corolario 4'. Si $f: A \subset E \to F$ es continua en el conjunto relativamente compacto A y existe $\lim_{x \to a} f(x)$, para todo $a \in A'$, entonces f es uniformemente continua en A.

Demostración. Por aplicación directa del Teorema 3 de 6.2, existe una función única $g : \bar{A} \subset E \to F$, continua en $\bar{A}$ y tal que

$$\forall x \in A : g(x) = f(x).$$

Ahora bien, como el conjunto $\bar{A}$ es compacto, g es uniformemente continua en $\bar{A}$, en virtud del Teorema 4.

También la función idéntica $j : A \subset E \to E$, tal que $\forall\, x \in A : j(x) = x$, es uniformemente continua en A y es claro que $f = g \circ j$. Luego f es uniformemente continua en A (Teorema 1).

El lema que sigue nos ayudará a demostrar el importante Teorema 5 y constituye además una especie de recíproco del corolario anterior.

Lema 1. Si $f : A \subset E \to F$ es uniformemente continua en A y el espacio (F, d') es completo, entonces existe $\lim_{x \to a} f(x)$, para todo $a \in A'$.

Demostración. Tomemos un $a \in A'$ cualquiera y demostremos la existencia del límite de f en a por aplicación del Teorema 4 de 5.7. Dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in A \text{ con } d(x, y) < \delta : d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Ahora bien, $S = N(a; \delta/2)$ es un entorno del punto a y

$$\forall x, y \in (S - \{a\}) \cap A$$

se tiene que $x, y \in N(a; \delta/2)$, de donde $d(x, a) < \delta/2$, $d(y, a) < \delta/2$, resultando que $d(x, y) \leq d(x, a) + d(y, a) < \delta$ y sabiendo que $x, y \in A$, obtenemos $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Vemos, pues, que el Teorema 4 de 5.7 nos asegura la existencia de $\lim_{x \to a} f(x)$ en cualquier punto $a \in A'$.

Estamos ahora en condiciones de establecer un elegante resultado sobre extensión de una función uniformemente continua (compárese con el Teorema 3 de 6.2), con la ventaja de que la continuidad de la extensión es también uniforme. Sus aplicaciones son muchas.

Teorema 5. Si $f : A \subset E \to F$ es uniformemente continua en A y el espacio (F, d') es completo, entonces existe una función única $g : \bar{A} \subset E \to F$, uniformemente continua en $\bar{A}$ y coincidente con f en A $(\forall x \in A : g(x) = f(x))$.

Demostración. La función f es continua en A y, en virtud del lema 1, existe $\lim_{x \to a} f(x)$, para todo $a \in A'$. El Teorema 3 de 6.2 nos dice entonces

que existe una función única $g : \bar{A} \subset E \to F$ continua en $\bar{A}$ y coincidente con f en A.

Sólo falta demostrar que g es uniformemente continua en $\bar{A}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in A \text{ con } d(x,y) < \delta : d'(f(x), f(y)) < \varepsilon/3. \qquad (1)$$

Tomemos un par de puntos cualesquiera $x, y \in \bar{A}$ con $d(x,y) < \delta/2$. Como g es continua en x y y, existen $\delta_x, \delta_y > 0$ tales que

$$\forall z \in \bar{A} \text{ con } d(z,x) < \delta_x : d'(g(z), g(x)) < \varepsilon/3 \qquad (2)$$

$$\forall t \in \bar{A} \text{ con } d(t,y) < \delta_y : d'(g(t), g(y)) < \varepsilon/3. \qquad (3)$$

Sea ahora $\delta' = \text{mín}\,\{\delta/4, \delta_x, \delta_y\}$ y, aplicando el Teorema 2 de 2.4, elegimos puntos

$$p \in A \cap N(x;\delta'),\ q \in A \cap N(y;\delta').$$

Luego, en virtud de (2) y (3) y la definición de δ',

$$d'(f(p), g(x)) < \varepsilon/3,\ d'(f(q), g(y)) < \varepsilon/3.$$

Por otra parte, también debido a la definición de δ',

$$d(p,q) \leq d(p,x) + d(q,x) \leq d(p,x) + d(q,y) + d(x,y) <$$

$$< \delta/4 + \delta/4 + \delta/2 = \delta,$$

lo cual implica, por (1)

$$d'(f(p), f(q)) < \varepsilon/3.$$

Tenemos finalmente,

$$d'(g(x), g(y)) \leq d'(f(p), g(x)) + d'(f(p), g(y)) \leq$$

$$\leq d'(f(p), g(x)) + d'(f(q), g(y)) + d'(f(p), f(q)) < \varepsilon$$

siempre que

$$x, y \in \bar{A},\ d(x,y) < \delta/2.$$

La continuidad uniforme nos permite introducir una relación de equivalencia entre espacios métricos más adecuada al caso que el homeomorfismo, en el sentido de mantener invariante propiedades que dependen di-

rectamente de la métrica y, a la vez, no es tan restrictiva como la isometría.

Decimos que el espacio métrico (E, d) es *uniformemente homeomórfico* al espacio (F, d') si existe un biyección $f : E \to F$, uniformemente continua en E y tal que f^{-1} es uniformemente continua en F.

Es rutinario demostrar que el homeomorfismo uniforme es una relación de equivalencia y lo dejamos en manos del lector, quien deberá hacer uso, para probar la transitividad, del Teorema 1.

Es claro que espacios uniformemente homeomórficos son homeomórficos, de manera que se aplica todo lo dicho para estos últimos en 6.2. En particular, que existe una correspondencia biunívoca entre los conjuntos abiertos de uno y otro y lo mismo vale para los cerrados. Lo que difiere del simple homeomorfismo es que también los conjuntos precompactos, al igual que las sucesiones de Cauchy, se corresponden uno a uno entre espacios uniformemente homeomórficos (Teoremas 2 y 3).

Una propiedad importante, que debe destacarse, es la siguiente: Supongamos que los espacios (E, d) y (F, d') son uniformemente homeomórficos y uno de ellos, por ejemplo (E, d), es completo, entonces (F, d') es también completo. O sea que la completitud es invariante con respecto a esta relación de equivalencia, dicho de otra manera, dos espacios uniformemente homeomórficos son ambos completos o ambos incompletos. En efecto, sea $\{y_n\}$ una sucesión de Cauchy en (F, d'); existe una biyección $f : E \to F$ tal que f y f^{-1} son uniformemente continuas en E y F respectivamente. En virtud del Teorema 3, $\{f^{-1}(y_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en E y, como éste es completo, existe un $x \in E$ con $f^{-1}(y_n) \to x$. Pero f es continua en x, luego $y_n = f[f^{-1}(y_n)] \to f(x)$ (Teorema 2 de 6.1), es decir, $\{y_n\}$ es convergente y (F, d') es completo.

Una condición suficiente (no necesaria, como veremos luego), para que espacios (E, d), (F, d') sean uniformemente homeomórficos es que exista una sobreyección $f : E \to F$ y números reales $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$\forall x, y \in E : \alpha d(x, y) \leq d'(f(x), f(y)) \leq \beta d(x, y).$$

Primeramente, f es inyectiva, ya que, si $f(x) = f(y)$, la primera mitad de la desigualdad implica que $x = y$. O sea que f es biyectiva y la segunda mitad de la desigualdad indica que satisface una condición de Lipschitz en E, luego es uniformemente continua en E. Por otra parte,

$$\forall x', y' \in F : d(f^{-1}(x'), f^{-1}(y')) \leq {}^1/_\alpha d'(f[f^{-1}(x')], f[f^{-1}(y')]) = {}^1/_\alpha d'(x', y').$$

De manera que f^{-1} es también uniformemente continua en F, por satisfacer allí una condición de Lipschitz.

Puede ocurrir que un mismo conjunto E esté provisto de dos métricas, dando origen a espacios métricos (E, d_1), (E, d_2). Cabe preguntarse si son uniformemente homeomórficos. En este caso, ya existe una biyección $j : E \to E$ que es la idéntica ($j(x) = x$, $\forall x \in E$) y, como aplicación de lo establecido arriba, podemos decir que una condición suficiente (de nuevo no necesaria) para el homeomorfismo uniforme de estos espacios es que existan números reales $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$\forall x, y \in E : \alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y).$$

Consideremos el siguiente ejemplo: Sea N el conjunto de los números naturales provisto de métricas d_1, d_2, donde d_1 es la métrica inducida por la de la recta real, y d_2 es la métrica discreta. Es muy sencillo comprobar que los espacios (N, d_1) y (N, d_2) son uniformemente homeomórficos bajo la biyección idéntica. No obstante, obsérvese que N es acotado en (N, d_2) pero no en (N, d_1), lo cual pone de manifiesto que la acotación no es invariante con respecto al homeomorfismo uniforme. Por otra parte, es trivialmente cierto que $\forall x, y \in N : d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$; pero, supongamos que existe un $\alpha > 0$ tal que $\forall x, y \in N : d_1(x, y) \leq \alpha d_2(x, y)$. Tomemos un $n \in N$ con $n > \alpha$, entonces $n = d_1(n, 0) \leq \alpha d_2(n, 0) = \alpha$, lo cual constituye una contradicción y, por tanto, no existe tal α.

6.7. COMPLETACION DE UN ESPACIO METRICO

Ya nos hemos percatado de las ventajas y riqueza en propiedades que ofrece un espacio métrico completo. Para remediar la situación, cuando se trata de un espacio incompleto, se ha ideado un importante e ingenioso artificio, mediante el cual se construye un espacio completo que contiene al dado y de forma tal, que es "el más pequeño" con esa propiedad, siendo además "único". Esta descripción, cuyo propósito es puramente orientador, será expuesta de manera precisa en lo que sigue. Podemos resumir el contenido de esta sección en tres partes. Primero, definiremos formalmente la completación de un espacio métrico; segundo, demostraremos que todo espacio admite una completación; finalmente, probaremos que todo par de completaciones de un mismo espacio son isométricas (unicidad).

En todo caso, las sucesiones desempeñan un papel fundamental y, antes de entrar en materia, conviene establecer algunas propiedades adicionales (muy sencillas) de éstas, en forma de lemas auxiliares.

Lema 1. Si $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ son sucesiones de Cauchy en un espacio (E, d), entonces la sucesión real $\{d(x_n, y_n)\}$ es convergente.

DEMOSTRACIÓN. Dado $\varepsilon > 0$, podemos hallar un $\nu \in N$ tal que

$$\forall n, n' \geq \nu : d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon/2,\ d(y_n, y_{n'}) < \varepsilon/2.$$

Ahora bien, aplicando el lema 1 de 1.1, se verifica

$$\forall n, n' \geq \nu : |d(x_n, y_n) - d(x_{n'}, y_{n'})| \leq d(x_n, x_{n'}) + d(x_n, y_{n'}) < \varepsilon.$$

O sea que la sucesión $\{d(x_n, y_n)\}$ es de Cauchy y, como la recta real es un espacio completo, es convergente.

Lema 2. $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ son sucesiones en un espacio (E, d). Si $\{x_n\}$ es de Cauchy y $d(x_n, y_n) \to 0$, entonces $\{y_n\}$ es también de Cauchy.

DEMOSTRACIÓN. Dado $\varepsilon > 0$, podemos hallar un $\nu \in N$ tal que

$$\forall n, n' \geq \nu : d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon/3,$$
$$\forall n \geq \nu : d(x_n, y_n) < \varepsilon/3.$$

Se verifica entonces,

$$\forall n, n' \geq \nu : d(y_n, y_{n'}) \leq d(x_n, y_n) + d(x_n, y_{n'}) \leq$$
$$\leq d(x_n, y_n) + d(x_{n'}, y_{n'}) + d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon.$$

Lema 3. $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ son sucesiones en un espacio (E, d). Si $x_n \to x$, $d(x_n, y_n) \to 0$, entonces también $y_n \to x$.

DEMOSTRACIÓN. Dado $\varepsilon > 0$, podemos hallar un $\nu \in N$ tal que

$$\forall n \geq \nu : d(x_n, x) < \varepsilon/2,\ d(x_n, y_n) < \varepsilon/2.$$

Luego,

$$\forall n \geq \nu : d(y_n, x) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y_n) < \varepsilon.$$

Lema 4. Si $x_n \to x$, $y_n \to y$, en un espacio (E, d), entonces $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

DEMOSTRACIÓN. Dado $\varepsilon > 0$, podemos hallar un $\nu \in N$ tal que

$$\forall n \geq \nu : d(x_n, x) < \varepsilon/2,\ d(y_n, y) < \varepsilon/2.$$

Aplicando entonces el lema 1 de 1.1, se verifica

$$\forall n \geq \nu : |d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) < \varepsilon.$$

Necesitaremos, además, algunos resultados de carácter muy elemental, sobre sucesiones en la recta real. Los utilizaremos sin citar, pero conviene establecerlos aunque sea escuetamente.

Sean pues $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sucesiones reales y supongamos que $x_n \to x$, $y_n \to y$. Es inmediato que $x_n + y_n \to x + y$; basta con escribir $|(x_n+y_n) - (x+y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$ y aplicar la definición de límite. Por otra parte, si existe un $\nu \in N$ tal que $\forall n \geq \nu : x_n \leq c$ (para algún $c \in R$), $x_n \leq y_n$, entonces $x \leq c$, $x \leq y$. Su demostración es muy fácil y se deja al lector; en todo caso, véanse los ejercicios 8, 11 del capítulo V.

Procedemos ahora a definir lo que hemos de entender por completación de un espacio.

Sea (E, d) un espacio métrico cualquiera. Se dice que el espacio (F, ∂) es una *completación* de (E, d) si satisface las siguientes condiciones:

1. (F, ∂) es un espacio métrico completo.
2. Existe un conjunto denso F_0 en (F, ∂) tal que (E, d) y el subespacio (F_0, ∂) son isométricos.

Es evidente que el espacio (E, d) es una completación de sí mismo si y sólo si es completo, pero volveremos luego sobre este caso.

Pasamos a demostrar el teorema fundamental.

Teorema 1. Todo espacio métrico admite una completación.

DEMOSTRACIÓN. Sea (E, d) un espacio métrico cualquiera y designemos por S al conjunto de todas sus sucesiones de Cauchy.

Definamos una relación binaria $\sim$ en S tal que, para $\{x_n\}, \{y_n\} \in S$, $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ si y sólo si $d(x_n, y_n) \to 0$.

Es sencillo comprobar que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre S. En efecto, $\forall \{x_n\} \in S : \{x_n\} \sim \{x_n\}$, ya que $\forall n \in N : d(x_n, x_n) = 0$; si $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ es una consecuencia trivial de la simetría de la métrica que $\{y_n\} \sim \{x_n\}$. Por último, si para $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\} \in S$ se tiene $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, $\{y_n\} \sim \{z_n\}$, entonces $\{x_n\} \sim \{z_n\}$, ya que $\forall n \in N : 0 \leq d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$ y la suma de la derecha tiende a cero.

Sea $F = {}^{S}/_{\sim}$, es decir, F es el conjunto de las clases de equivalencia determinadas por $\sim$ sobre S.

El próximo paso consiste en proveer a F de una métrica. En ese sentido, definamos una función $\partial : F \times F \to R$ tal que, para todo par de elementos $\xi = cl\,\{x_n\}$, $\eta = cl\,\{y_n\}$ de F, $\partial(\xi, \eta) = \lim d(x_n, y_n)$.

Este límite siempre existe, en virtud del lema 1. Por otra parte, ∂ está bien definida, ya que, si se toman $\{x'_n\} \in \xi$, $\{y'_n\} \in \eta$ cualesquiera entonces $\{x'_n\} \sim \{x_n\}$, $\{y'_n\} \sim \{y_n\}$ y, aplicando el lema 1 de 1.1, $\forall n \in N$:

$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n)$, pero, como el miembro de la derecha tiende a cero, lo mismo sucede con el de la izquierda. Se deduce, por el lema 3, que

$$\text{lím } d(x_n, y_n) = \text{lím } d(x'_n, y'_n).$$

Veamos que ∂ es una métrica para F.

Primeramente, es consecuencia inmediata de la definición de ∂ que

$$\forall \xi, \eta \in F : \partial(\xi, \eta) \geq 0.$$

La propiedad simétrica de ∂ se deduce en seguida de la simetría de d.

Es evidente que $\forall \xi \in F : \partial(\xi, \xi) = 0$. Recíprocamente, supongamos que, para $\xi = cl\,\{x_n\}$, $\eta = cl\,\{y_n\}$ en F, se tiene que $\partial(\xi, \eta) = \text{lím } d(x_n, y_n) = 0$; esto implica $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, de donde $\xi = \eta$. Por último tomando $\xi = cl\,\{x_n\}$, $\eta = cl\,\{y_n\}$, $\zeta = cl\,\{z_n\}$ cualquiera en F, se verifica

$$\forall n \in N : d(x_n, y_n) \leq d(x_n, z_n) + d(y_n, z_n)$$

y, pasando al límite de ambos miembros de la desigualdad, obtenemos

$$\partial(\xi, \eta) \leq \partial(\xi, \zeta) + \partial(\eta, \zeta).$$

En resumen (F, ∂) es un espacio métrico.

Sea F_0 el conjunto de todos los puntos $\xi \in F$ de la forma $\xi = cl\,\{x\}$, es decir, que son clases de equivalencia de sucesiones constantes en (E, d). Es interesante observar, aunque no haremos uso de ello y se deja al lector, que podemos expresar

$$F_0 = \{\xi \in F \mid \xi = cl\,\{x_n\}, \text{ donde } \{x_n\} \text{ es convergente}\}.$$

Es inmediato que la función $f : E \to F_0$, tal que $\forall x \in E : f(x) = cl\,\{x\} \in F_0$, es biyectiva. Además,

$$\forall x, y \in E : d(x, y) = \text{lím } d(x, y) = \partial(f(x), f(y)).$$

De manera que (E, d) y el subespacio (F_0, ∂) son isométricos bajo f.

Sea $\{x_n\} \in S$ y consideremos la sucesión $\{f(x_n)\}$ y el punto $\xi = cl\,\{x_n\}$, ambos en F.

Dado $\varepsilon > 0$, existe un $\nu \in N$ tal que $\forall n, n' \geq \nu : d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon/2$. Conservemos n' fijo, pero con $n' \geq \nu$; entonces las sucesiones $\{x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$, $\{x_{n'}, x_{n'}, \cdots, x_{n'}, \cdots\}$ son de Cauchy en (E, d) y, aplicando el lema 1 y las definiciones de ∂, f, obtenemos

$$\partial(\xi, f(x_{n'})) = \lim d(x_n, x_{n'}) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

siempre que $n' \geq \nu$. Pero esto equivale a $f(x_n) \to \xi$.

En resumen, hemos demostrado que

$$\{x_n\} \in S \Longrightarrow f(x_n) \to cl\,\{x_n\}. \tag{1}$$

Otra manera de expresar (1) es que, para todo $\xi = cl\,\{x_n\} \in F$, $f(x_n) \to \xi$. Pero nótese que, como la sucesión $\{f(x_n)\}$ está en F_0, esto implica que $\xi \in \overline{F}_0$, en virtud del corolario 2' de 5.1. Tenemos entonces $F \subset \overline{F}_0$, de donde $\overline{F}_0 = F$ y F_0 es denso.

Finalmente, veamos que (F, ∂) es completo.

Sea $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\}$ una sucesión de Cauchy en (F, ∂). Construyamos una sucesión $\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, \cdots\}$ en F_0 por el siguiente procedimiento: para cada $n \geq 1$, elegimos un $\eta_n \in F_0$ con $\partial(\xi_n, \eta_n) < 1/n$; esto es posible, ya que, como $\overline{F}_0 = F$, entonces $\xi_n \in \overline{F}_0$ y el conjunto $N(\xi_n; 1/n) \cap F_0$ no es vacío (Teorema 2 de 2.4).

Es claro que la construcción de $\{\eta_n\}$ implica que $\partial(\xi_n, \eta_n) \to 0$. Luego, por el lema 2, $\{\eta_n\}$ es una sucesión de Cauchy, de donde $\{f^{-1}(\eta_n)\} \in S$ (obvio).

Aplicando ahora (1) y designando por $\xi = cl\{f^{-1}(\eta_n)\} \in F$, obtenemos

$$\lim f[f^{-1}(\eta_n)] = \lim \eta_n = \xi.$$

El lema 3 nos dice entonces que $\xi_n \to \xi$.

En definitiva (F, ∂) es una completación de (E, d). ●

En la práctica se suelen identificar los espacios (E, d) y (F_0, ∂), no se hace distinción entre ellos. En tal sentido, se considera (E, d) como un subespacio de (F, ∂) y E denso.

Dirigimos ahora nuestra atención sobre la cuestión de unicidad de la completación.

En el Teorema 1 hemos construido, mediante un ingenioso y elaborado procedimiento, la completación de un espacio métrico cualquiera, pero ello no descarta la existencia de completaciones distintas o de otras maneras de construirlas. Tiene, pues, sentido preguntarse si acaso se obtiene siempre, en esencia, la misma cosa. La respuesta la proporciona el siguiente teorema.

Teorema 2. Dos completaciones de un mismo espacio métrico son isométricas.

DEMOSTRACIÓN. Sean (F, ∂), (F', ∂') completaciones del mismo espacio (E, d). Existen, pues, conjuntos densos F_0, F_0' tales que (E, d) es isométrico con los subespacios (F_0, ∂) y (F'_0, ∂').

En virtud de la transitividad de la isometría (véase 1.3), los subespacios (F_0, ∂) y (F_0', ∂') son isométricos bajo una cierta biyección $f : F_0 \to F_0'$.

Es evidente que la función $f : F_0 \subset F \to F'$ es uniformemente continua en F_0 y, como (F', ∂') es completo, el Teorema 5 de 6.6, sabiendo que $\overline{F}_0 = F$, nos dice que existe una función única $g : F \to F'$, uniformemente continua en F y tal que $\forall x \in F_0 : g(x) = f(x)$.

Tomemos puntos $x, y \in F$ cualesquiera. Como $F = \overline{F}_0$, existen sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ en F_0 con $x_n \to x$, $y_n \to y$ (corolario 2′ de 5.1.). Por otra parte, g es continua en x, y, luego $g(x_n) \to g(x)$, $g(y_n) \to g(y)$ (Teorema 2 de 6.1).

Aplicando dos veces el lema 4, obtenemos

$$\partial(x, y) = \text{lím}\, \partial(x_n, y_n) = \text{lím}\, \partial'(f(x_n), f(y_n)) =$$
$$= \text{lím}\, \partial'(g(x_n), g(y_n)) = \partial'(g(x), g(y)).$$

Esta igualdad, válida para todo par de puntos $x, y \in F$, implica de inmediato que g es inyectiva y que (F, ∂) es isométrico con el subespacio $(g(F), \partial')$, el cual ha de ser completo como consecuencia de la completitud de (F, ∂). Pero entonces $g(F)$ es un conjunto cerrado en (F', ∂'), en virtud del Teorema 2 de 5.3. Por otra parte, como $F_0 \subset F$, tenemos

$$g(F_0) = f(F_0) = F'_0 \subset g(F) \subset F'$$

y, clausurando,

$$F' = \overline{F}_0' \subset g(F) \subset F'.$$

O sea que $g(F) = F'$.

Podemos ahora dilucidar del todo el caso en que el espacio dado sea completo.

Corolario 2′. Un espacio completo es isométrico con cualquiera de sus completaciones.

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que un espacio completo es una completación de sí mismo, luego, en virtud del Teorema 2, es isométrico con cualquiera de sus completaciones.

El corolario lo podemos expresar diciendo que si el espacio es completo, no se construye nada nuevo al completarlo.

6.8. CONTRACCIONES Y TEOREMA DEL PUNTO FIJO

Consideremos un espacio métrico (E, d) y una función $f : E \to E$. Se dice que $x \in E$ es un *punto fijo de* f si $f(x) = x$; el nombre proviene de que "f deja a x fijo".

La existencia de algún punto fijo y la posibilidad de hallarlo son cuestiones de gran importancia para una variedad de situaciones en Topología, Análisis, Cálculo Numérico, Ecuaciones Diferenciales y muchas otras ramas. Diversas demostraciones y cálculos pueden plantearse de forma tal que se reduzcan a determinar la existencia de un punto fijo. En calidad de ejemplo elemental, supongamos que el espacio (E, d) es la recta real y queremos resolver la ecuación $f(x) = 0$; pues bien, cualquiera de sus raíces es un punto fijo de la función $g(x) = f(x) + x$.

Los llamados teoremas del punto fijo son aquellos que garantizan, bajo ciertas condiciones, la existencia de algún punto fijo de una función. Hay varios y muy diferentes entre sí. Uno muy famoso es el de Brouwer, en Topología General, cuya demostración es bastante sofisticada. Un caso muy particular de éste lo constituye el ejercicio 58, que se resuelve aplicando adecuadamente la proposición C_6 de 6.4 a una función construida al efecto.

No menos famoso e importante que el de Brouwer es el teorema del punto fijo que presentamos aquí, generalmente atribuido a Banach. Sus aplicaciones son notables.

Antes conviene establecer un hecho de carácter muy elemental. Comencemos por lo siguiente: consideremos un número real mayor que uno, que siempre podemos expresar como $1 + \delta$, con $\delta > 0$, y sea $M > 0$ cualquiera. Como el cuerpo de los números reales es arquimediano, existe un $n \in N$ tal que $n\delta > M - 1$. Ahora bien, aplicando la fórmula del binomio deducimos en seguida que $(1+\delta)^n > 1 + n\delta$, de donde $(1+\delta)^n > M$. Hemos probado que si $k > 1$ y $M > 0$, existe un $n \in N$ con $k^n > M$.

Sea ahora k un número real con $0 < k < 1$. Una aplicación trivial del principio de inducción nos indica que la sucesión real $\{k^n\}$ es decreciente y que 0 es cota inferior de su rango. Sabemos entonces, por 5.1, que $\{k^n\}$ es convergente y que su límite es igual al extremo inferior de su rango, por tanto, mayor o igual que cero. Tomemos un $\varepsilon > 0$ cualquiera. Ya que $^1/_k > 1$, en virtud de lo establecido arriba existe algún $n \in N$ con $(^1/_k)^n = {^1/_{k^n}} > {^1/_\varepsilon}$, de donde $k^n < \varepsilon$. O sea que ningún número real positivo es cota inferior del rango de $\{k^n\}$ en tanto que 0 sí lo es. Inferimos que $k^n \to 0$. Superado este detalle de carácter auxiliar, volvemos a lo que nos ocupa.

Sea una función $f : E \to E$, donde (E, d) es un espacio métrico. Se dice que f es una *contracción* o que es una *función contráctil* si existe un número real k, con $0 < k < 1$, tal que

$$\forall x, y \in E : d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Es claro que una contracción $f : E \to E$ es uniformemente continua en E, ya que satisface allí una condición de Lipschitz.

Demostramos ahora el resultado fundamental.

Teorema 1. (Banach). Si el espacio (E, d) es completo y $f : E \to E$ es una función contráctil, entonces f admite un punto fijo único.

DEMOSTRACIÓN. Existe un número real k, con $0 < k < 1$, tal que

$$\forall x, y \in E : d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Construyamos una sucesión $\{x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ en E de la siguiente manera: Elegimos el punto $x_0 \in E$ arbitrariamente y

$$\forall n \in N : x_{n+1} = f(x_n).$$

Así pues,

$$x_1 = f(x_0), \; x_2 = f(x_1), \text{ etc.}$$

Nos proponemos demostrar que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy.

Primero, afirmamos que se cumple la propiedad

$$\forall n \in N : d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1). \tag{1}$$

En efecto, aplicando el principio de inducción, notamos que la desigualdad de (1) es trivialmente cierta para $n = 0$. Supongamos que dicha desigualdad se cumple para un $n \in N$. Teniendo presente la definición de $\{x_n\}$ y que f es contráctil, se obtiene

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq kd(x_n, x_{n+1}) \leq k^{n+1}d(x_0, x_1);$$

o sea que la desigualdad es también cierta para $n + 1$ y concluimos que se verifica (1).

Por otra parte, mediante simple aplicación reiterada de la desigualdad triangular de la métrica, obtenemos, para todo par $n, p \in N$,

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \sum_{i=1}^{p} d(x_{n+i-1}, x_{n+i})$$

y haciendo uso de (1) en cada uno de los sumandos de la derecha

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_0, x_1) \sum_{i=1}^{p} k^{n+i-1};$$

pero, observando que los términos de la sumatoria están en progresión geométrica,

$$\sum_{i=1}^{p} k^{n+i-1} = \frac{1-k^p}{1-k} \cdot k^n < \frac{k^n}{1-k}$$

y resulta finalmente

$$\forall n, p \in N : d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1) \tag{2}$$

(la desigualdad puede no ser estricta, ya que debemos contemplar la posibilidad de que $x_0 = x_1 = f(x_0)$, en cuyo caso x_0 es el punto fijo).

Sabiendo que $k^n \to 0$, es ya obvio, por (2), que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy y, como (E, d) es completo, $x_n \to x$, para algún punto $x \in E$.

Ahora bien, f es continua en x; luego, haciendo uso del Teorema 2 de 6.1, obtenemos

$$f(x) = \text{lím } f(x_n) = \text{lím } x_{n+1} = x.$$

Resulta pues que x es el punto fijo buscado. Su unicidad se establece con facilidad. En efecto, supongamos que existe un $y \in E$ con $x \neq y$, $f(y) = y$, entonces $d(x, y) > 0$ y se verifica

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y),$$

de donde $1 \leq k$ que es una contradicción. En definitiva, f admite un punto fijo único.

La completitud del espacio es esencial para la validez del teorema precedente. Consideremos el caso en que (E, d) es el subespacio de la recta real donde $E = R - \{0\}$. Tal espacio no es completo, ya que el conjunto E no es cerrado (es abierto), según el corolario 3′ de 5.3. Tomando $0 < k < 1$, definimos la función $f : E \to E$ tal que $\forall x \in E : f(x) = kx$; f es claramente contráctil y, sin embargo, no admite punto fijo alguno.

Es importante destacar el carácter constructivo del hermoso Teorema 1; su demostración establece mucho más que la existencia del punto fijo, nos enseña un procedimiento práctico para hallarlo con cualquier aproximación que se desee.

Entre las aplicaciones notables del Teorema 1 se encuentran la mayoría de los teoremas de existencia, tales como los de las funciones inversa e implícita, soluciones de ecuaciones diferenciales e integrales de diversa es-

pecie. En cálculo numérico se emplea frecuentemente como método efectivo para resolver ecuaciones. Parece ser que el primero en usarlo de manera sistemática fue Picard, por lo cual se le llama con frecuencia teorema de Picard. En los ejercicios podrán verse algunas aplicaciones elementales.

Puede ocurrir que la función $f : E \to E$ no sea contráctil, pero que, para algún número natural $n > 1$, f^n sí sea una contracción, donde definimos por inducción $f^n = f \circ f^{n-1}$. Aquí f admite también un punto fijo, tal como se establece en seguida.

Corolario 1'. Sea la función $f : E \to E$, donde el espacio (E, d) es completo.

Si para algún número natural $n \geq 1$ la función f^n es contráctil, entonces f admite un punto fijo único.

DEMOSTRACIÓN. Designemos por $g = f^n$. Existe un número real k, con $0 < k < 1$ y tal que

$$\forall x, y \in E : d(g(x), g(y)) \leq k d(x, y).$$

En virtud del Teorema 1, existe un único punto $x \in E$ con $g(x) = x$. Por otra parte, nótese que

$$g \circ f = f^{n+1} = f \circ g,$$

de donde

$$f(x) = f[g(x)] = g[f(x)].$$

Se verifica entonces

$$d(x, f(x)) = d(g(x), g[f(x)]) \leq k d(x, f(x))$$

lo cual implica $d(x, f(x)) = 0$, es decir $x = f(x)$, ya que, de lo contrario, tendríamos la contradicción $1 \leq k$.

Tenemos pues que x es también punto fijo de f.

Si para algún $y \in E$ se tiene $f(y) = y$, necesariamente $g(y) = y$, de donde $y = x$, por la unicidad del punto fijo de g. En definitiva, f admite un único punto fijo que es el mismo de g.

Este corolario no sólo generaliza el Teorema 1 en la forma obvia, sino que además deja de suponer la continuidad de f.

EJERCICIOS

1. Sea $f : E \to F$ y $a \in E$. Probar que f es continua en el punto a si y sólo si, para todo entorno T de $f(a)$ se verifica que $a \in \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(T)}}$.

2. Sea $f : A \subset E \to R$ continua en el conjunto A, $a \in A$ y c es un número real con $f(a) < c$.
Demuéstrese que existe un entorno S de a tal que

$$\forall x \in A \cap S : f(x) < c.$$

3. Sea $f : A \subset E \to R$ continua en el conjunto A y $a \in A$. Supongamos que para todo entorno S de a existen puntos $x, y \in S \cap A$ tales que $f(x)$, $f(y)$ son de signos contrarios. Demuéstrese que $f(a) = 0$.
(*Sugerencia:* Reducción al absurdo y ejercicio anterior.)

4. Considérese una función $f : A \subset E \to F$ cuyo rango es un conjunto acotado.
Si $a \in A$, se define *oscilación de f en a* como el número real positivo (o cero):

$$\omega_f(a) = \inf_S \delta[f(S \cap A)]$$

donde el inf se calcula considerando todos los entornos S de a.
Demuéstrense las siguientes propiedades:

a) f es continua en $a \in A$ si y sólo si $\omega_f(a) = 0$.
b) Si $\alpha \in R$, el conjunto $B_\alpha = \{x \in A \mid \omega_f(x) < \alpha\}$ es abierto en el subespacio (A, d).
c) El conjunto $D = \{x \in A \mid f$ es ciscontinua en $x\}$ puede expresarse como

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{(de unión de conjuntos) } D_n,$$

donde cada D_n es cerrado en el subespacio (A, d).

5. Sea $f : A \subset E \to F$ continua en el conjunto A y $b \in F$ es un punto cualquiera. Probar que el conjunto $B = \{x \in A \mid f(x) = b\}$ es cerrado en el subespacio (A, d).

6. Sea $f : R \to R$ continua en R. Demostrar que el conjunto de las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ es cerrado.

7. Sea $f : E \to F$ continua en E, siendo el espacio (E, d) completo. Probar que, si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en E, entonces $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en F.

8. Sea $f : E \to R$. Demostrar que f es continua en E si y sólo si, para todo $\alpha \in R$, los conjuntos

$$A_\alpha = \{x \in E \mid f(x) < \alpha\},\ B_\alpha = \{x \in E \mid f(x) > \alpha\}$$

son abiertos en (E, d).

9. A y B son conjuntos cerrados, no vacíos y disjuntos en el espacio (E, d). Probar que existen conjuntos abiertos y disjuntos U, V tales que $A \subset U$, $B \subset V$.
(*Sugerencia:* Considerar las funciones

$$f(x) = d(x, A),\ g(x) = d(x, B)).$$

10. Sea $f : E \to F$ continua en E, siendo el espacio (E, d) completo. Definamos:

$$\forall x, y \in E : D(x, y) = d(x, y) + d'(f(x), f(y)).$$

Demostrar que D es una métrica sobre E y que el espacio (E, D) es completo.
Deducir además que los espacios (E, d) y (E, D) son homeomórficos y que éste se hace uniforme si f es uniformemente continua en E.

11. Sea $f : E \to F$ continua y sobreyectiva en E. Demostrar que, si S es un conjunto denso de (E, d), entonces $f(S)$ es denso en (F, d').

12. Demostrar que la función $f : E \to F$ es continua en E si y sólo si, para todo conjunto B de (F, d'),

$$f^{-1}(\dot{B}) \subset \widehat{f^{-1}(B)}^{\bullet}.$$

13. Demostrar que $f : A \subset E \to F$ es continua en A si y sólo si, para todo conjunto S con $S \subset F$,

$$f^{-1}(\mathring{S}) \subset [E - \overline{A - f^{-1}(S)}] \cap A.$$

(*Sugerencia:* Ejercicio 19 del capítulo II y el ejercicio anterior.)

14. Sean $f : A \subset E \to F$, $g : B \subset E \to F$ continuas en A y B respectivamente. Supongamos que

$$\forall x \in A \cap B : f(x) = g(x).$$

Definamos $h : A \cup B \subset E \to F$ tal que

$$\forall x \in A : h(x) = f(x),$$
$$\forall x \in B : h(x) = g(x).$$

Discútase la continuidad de h en $A \cup B$ y proporciónese un ejemplo que indique que h puede no ser continua.
¿Qué hipótesis conviene añadir para asegurar la continuidad de h en $A \cup B$?

15. Probar que $f : A \subset E \to F$ es continua en A si y sólo si

$$\forall y \in f(A), \ \forall r > 0,$$

el conjunto $f^{-1}[N(y; r)]$ es abierto en el subespacio (A, d).

16. Consideremos los siguientes conjuntos del espacio R^2:

$$A = \{(x, y) \in R^2 \mid x > 0, xy = 1\}, B = \{(x, y) \in R^2 \mid x > 0, y = 0\}.$$

Demostrar que A y B son cerrados, disjuntos y $d(A, B) = 0$.

17. Demostrar que, si un espacio (E, d) es compacto y todos sus puntos son aislados, entonces E es finito y (E, d) es homeomórfico con un espacio métrico discreto.

18. Sea $f : A \subset E \to F$ continua en el conjunto conexo A. Supongamos que para cada $x \in A$ existe un entorno S de x tal que f es constante en $S \cap A$.
Probar que f es constante en A.

19. Sea $f : E \to F$ biyectiva. Demostrar que f es un homeomorfismo si y sólo si para todo conjunto A de (E, d) se verifica

$$f(\bar{A}) = \overline{f(A)}.$$

20. Consideremos una función $f : A \subset R \to R$, donde A es compacto, y el conjunto $G = \{(x, f(x)) \in R^2 \mid x \in A\}$.
Probar que f es continua en A si y sólo si G es compacto en el espacio R^2.

21. Sean $f, g : A \subset E \to R$ continuas en el conjunto A. Demostrar que la función $h : A \subset E \to R$, tal que

$$\forall x \in A : h(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\},$$

es continua en A.

22. Sean $f, g : R \to R$ continuas en R. Probar que la función $h : R^2 \to R^2$ tal que

$$\forall x, y \in R : h(x, y) = (f(x), g(y))$$

es continua en R^2.

23. Sean A, B conjuntos cerrados y disjuntos en (E, d).
Demostrar que existe una función $f : E \to [0, 1]$, continua en E y tal que

$$\forall x \in A : f(x) = 0;$$
$$\forall x \in B : f(x) = 1.$$

(*Sugerencia:* Considérese $f(x) = \dfrac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$).

24. Probar que, si $f : \bar{A} \subset E \to F$ es continua en $\bar{A}$ y constante en A, entonces f es constante en $\bar{A}$.

25. Se dice que una función $f : R \to R$ es *periódica de período* $p \in R$ si

$$\forall x \in R : f(x+p) = f(x).$$

Demostrar que, si tal función es continua en R, entonces es uniformemente continua en R.

26. Demostrar que, si $f : A \subset E \to R$ es continua en el conjunto compacto A y $\forall x \in A : f(x) > 0$, entonces existe un $k > 0$ tal que

$$\forall x \in A : f(x) \geq k.$$

27. Probar que un conjunto no vacío A de (E, d) es compacto si y sólo si toda función $f : A \subset E \to R$, continua en A, alcanza un máximo absoluto en A.

28. Sea $f : [a, b] \subset R \to R$ continua en $[a, b]$. Defínase la función $g : [a, b] \to R$ tal que

$$\forall x \in [a, b] : g(x)$$

es el máximo absoluto de f en $[a, x]$. Demostrar que g es continua en $[a, b]$.

29. Si A es un conjunto compacto de (E, d), demuéstrese que siempre existen puntos $x, y \in A$ con $d(x, y) = \delta(A)$.

30. A todo conjunto A de (E, d) asociamos una función $\varphi_A : E \to R$ tal que

$$\forall x \in A : \varphi_A(x) = 1;$$
$$\forall x \in E - A : \varphi_A(x) = 0.$$

φ_A se denomina función característica de A.

a) Determinar el conjunto donde φ_A es continua y el conjunto donde no lo es.
b) Probar que E es conexo si y sólo si las únicas funciones características continuas en E son φ_ϕ, φ_E.

31. Demuéstrense los corolarios 1′ y 2′ de 3.2 y el Teorema 1 de 6.4 haciendo uso del ejercicio anterior en (*b*).

32. Supongamos que (E, d) es un espacio métrico conexo y que no es acotado. Demostrar que toda superficie esférica (de cualquier centro y radio) es no vacía.

33. Probar que, si $f : A \subset E \to F$ es continua y no constante en el conjunto conexo A, entonces su rango $f(A)$ no es contable.

34. Se dice que la función $f : A \subset R \to R$ es *creciente* si

$$\forall x, y \in A \text{ con } x < y : f(x) \leq f(y);$$

es creciente en sentido estricto si la última desigualdad es siempre estricta. Función *decreciente* se define análogamente invirtiendo el sentido de la última desigualdad; así mismo, decreciente en sentido estricto. Si una función es creciente o decreciente se denomina *monótona.* Nótese que se trata de una propiedad global.

a) Demuéstrese que, si $f : A \subset R \to f(A) \subset R$ es creciente en sentido estricto, entonces f es biyectiva y $f^{-1} : f(A) \to A$ es también creciente en sentido estricto.
b) Probar que, si $f : [a, b] \to R$ es continua e inyectiva en $[a, b]$, entonces f y f^{-1} son ambas monótonas estrictas en el mismo sentido en sus respectivos dominios y f^{-1} es continua en su dominio.

35. Si $f : A \subset E \to F$ es continua en A y S es un arco contenido en A, demuéstrese que $f(S)$ es un arco.

36. Consideremos el conjunto $A = \{(x, y) \in R^2 \mid x \in (0, 1], y = \text{sen}\, ^1/_x\}$ en el espacio R^2.
Compruébese que A es conexo y arco-conexo.
Demuéstrese que $\bar{A}$ es conexo y no arco-conexo.

37. Si $A \subset B$, dedúzcase, empleando la notación del lema 1 de 6.5, que para

$$x, y \in A : x \overset{A}{\sim} y \Longrightarrow x \overset{B}{\sim} y.$$

38. Las llamadas *proyecciones* se definen como funciones $pr_i : R^n \to R$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ tal que si $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n : pr_i(x) = x_i$.
Compruébese que pr_i es sobreyectiva y uniformemente continua, pero no inyectiva, en R^n.
Se definen también $b_i : R \to R^n$ $(i = 1, \cdots, n)$ tal que

$$\forall \lambda \in R : b_i(\lambda) = (x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

donde

$$x_j = 0 \ (i \neq j), \ x_i = \lambda.$$

Compruébese que b_i es inyectiva y continua en R, pero no sobreyectiva.
Verifíquense además las siguientes relaciones:

$$pr_i \circ b_j = 0 \ (i \neq j), \ pr_i \circ b_i = I, \ \sum_{i=1}^{n} b_i \circ pr_i = I.$$

39. Dada la función $f : A \subset E \to R^n$, definimos sus *funciones coordenadas* como $f_i = pr_i \circ f$ $(i = 1, \cdots, n)$. Verifíquense las siguientes propiedades:

a) $\forall x \in A : f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x)) = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \circ f_i\right)(x)$.

b) f continua en $a \in A \Longleftrightarrow f_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ continua en a.

c) f uniformemente continua en $A \Longleftrightarrow f_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ uniformemente continua en A.

40. Probar que, si $f : A \subset E \to F$ es uniformemente continua en el conjunto precompacto A y (F, d') es completo, entonces $f(A)$ es relativamente compacto.

41. Probar que, si $f : A \subset R^n \to F$ es uniformemente continua en el conjunto acotado A, entonces $f(A)$ es precompacto.

42. Demostrar que $f : E \to F$ es uniformemente continua en E si y sólo si, para todo par de conjuntos no vacíos A, B de (E, d), con

$$d(A, B) = 0 : d'(f(A), f(B)) = 0.$$

43. Sea $f : (0, 1) \subset R \to R$ tal que

$$\forall x \in (0, 1) : f(x) = {}^1/_x.$$

Demostrar que f es continua, pero no uniformemente continua, en $(0, 1)$ y que su rango no es precompacto.

44. Sea $f : (0, 1) \subset R \to R$ tal que

$$\forall x \in (0, 1) : f(x) = \text{sen}\, {}^1/_x.$$

Demostrar que f es continua, pero no uniformemente continua en $(0, 1)$ y que su rango es precompacto.
(*Sugerencia:* Lema 1 de 6.6.)

45. Sea $f : E \to F$ biyectiva y continua en el conjunto compacto E. Demostrar que los espacios (E, d) y (F, d') son uniformemente homeomórficos bajo f.

46. Demostrar que todo espacio métrico es uniformemente homeomórfico con un espacio acotado.
(*Sugerencia:* Ejercicio 2 del capítulo I.)

47. Sea $f : A \subset E \to H$, donde $(H, \| \ \|)$ es un espacio normado. Definamos $g : A \subset E \to R$ tal que

$$\forall x \in A : g(x) = \|f(x)\|.$$

Demostrar:

a) f continua en $x \in A \Longrightarrow g$ continua en x.
b) Constrúyase un ejemplo que indique que el recíproco de *a*) no es, en general, cierto.
c) f uniformemente continua en $A \Longrightarrow g$ uniformemente continua en A.

48. Probar que, si $f : (a, b) \subset R \to R$ es uniformemente continua en (a, b), entonces existen los límites de f en a y en b.

49. Sean $f, g : A \subset E \to R$ uniformemente continuas en A. Demostrar que $f+g$, $f\cdot g$ (se definen: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$) son uniformemente continuas en A.

50. Demostrar que, si $f : A \subset E \to F$ es continua en el conjunto precompacto A, (E, d) es completo y existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, $\forall a \in A'$, entonces f es uniformemente continua en A.

51. Sea $f : A \subset R^n \to F$ continua en el conjunto acotado A y (F, d') completo. Demostrar que f es uniformemente continua en A si y sólo si existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, $\forall a \in A'$.

52. (E_1, d_1) y (E_2, d_2) son espacios métricos. Definimos,

$$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in E_1 \times E_2 = E :$$

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \text{máx}\,\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\} \\ d'(x, y) &= d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \\ d''(x, y) &= \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}. \end{aligned}$$

Probar que d, d', d'' son métricas sobre E y que los espacios resultantes son uniformemente homeomórficos. Esto significa que es indiferente cuál de las tres métricas elegimos para E; en la práctica es más sencillo trabajar con d.

53. Probar que, si A_1 y A_2 son abiertos en (E_1, d_1) y (E_2, d_2) respectivamente, entonces $A_1 \times A_2$ es abierto en el espacio producto $E_1 \times E_2$, con cualquiera de las métricas del ejercicio anterior.

54. Demostrar que el espacio producto $E_1 \times E_2$, con cualquiera de las métricas d, d', d'', es completo si y sólo si son completos (E_1, d_1) y (E_2, d_2).

55. Demostrar que la métrica $d : E \times E \to R$, de un espacio (E, d), es uniformemente continua en el espacio producto $E \times E$.

56. Sea (F, ∂) una completación de (E, d). Demuéstrese la equivalencia: E es precompacto en $(E, d) \Longleftrightarrow F$ es compacto en (F, ∂).

57. Probar que, si $f : E \to E$ es continua en E, el conjunto de los puntos fijos de f es cerrado.

58. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ continua en $[a, b]$.
Demostrar que f admite un punto fijo (no necesariamente único).
(*Sugerencia:* C_5 de 6.4.)

59. Sea $f : R \to R$ derivable en R y tal que $\forall x \in R : |f'(x)| \leq k$, donde $0 < k < 1$. Probar que f es contráctil en R.

60. Supongamos que $f : R \to R$ es derivable en R y que su función derivada f' es continua en R y que f admite un punto fijo $z \in R$, donde $f'(z) = 0$.
Demostrar que existe un intervalo $[a, b]$ tal que toda sucesión $\{x_n\}$ con $x_0 \in [a, b]$ y $\forall n \in N : x_{n+1} = f(x_n)$, converge a z.

CAPITULO VII

Espacios normados

7.1. FUNDAMENTOS

Este capítulo debe interpretarse como una breve introducción a vastas teorías matemáticas que tienen su origen en el estudio de los espacios normados. Lo que tratamos aquí puede tomarse como punto de partida para el Cálculo Diferencial en Espacios Normados, Espacios Vectoriales Topológicos, Teoría Espectral, Análisis Funcional y otras ramas de gran interés y profundidad. Hemos tenido necesidad de reprimir tentaciones de desarrollar y ahondar en una variedad de cuestiones que conducen a resultados de enorme trascendencia. No es el propósito de esta obra abarcar el Análisis Funcional. Se espera más bien que este capítulo abra el apetito intelectual del lector y lo incite a disfrutar de las teorías que hemos mencionado.

Haremos uso de conocimientos muy elementales sobre espacios vectoriales y transformaciones lineales, con los cuales el lector debe estar familiarizado. Aunque, la mayoría de las veces, recordaremos brevemente los conceptos.

Partimos de los ejemplos 3 y 4 de 1.1, donde se definen la norma y producto interior de que puede estar provisto un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales. Allí se establece que un espacio normado puede considerarse como un espacio métrico con respecto a la métrica inducida por la norma y, al tratarlos como tales debe entenderse, sin excepción, que nos referimos a esa métrica. Así pues, todo lo establecido en los

capítulos anteriores sobre espacios métricos es aplicable y válido para espacios normados en particular. Aquí nos proponemos destacar aquellas propiedades específicas de los espacios normados que no son generalizables a espacios métricos cualesquiera. Es interesante hacer lo mismo con espacios euclídeos, que son también normados y por tanto métricos (ejemplo 4 de 1.1), y se origina una fascinante teoría; pero no la desarrollaremos aquí. Basta con saber que todo lo relativo a normados es válido para los euclídeos.

En un espacio normado se conjugan dos estructuras de naturaleza diversa, una algebraica, como espacio vectorial, y otra topológica en su carácter de espacio métrico. De la combinación de ambas y la manera como influyen entre sí se desarrolla una hermosa teoría de extraordinaria riqueza. Tratadas independientemente constituyen la Topología Métrica, ya estudiada, y el Algebra Lineal. Ahora nos ocupamos de analizar su confluencia. Entre otras cosas, se pondrá de manifiesto que los espacios normados son menos susceptibles a la "patología" que los métricos; queremos decir que hemos visto ejemplos de estos últimos que presentan propiedades muy extrañas; los normados, por el contrario, se acercan mucho más a nuestra intuición geométrica, en ellos suceden las cosas casi siempre como nosotros esperaríamos sucediesen; resultan menos difíciles de imaginar.

Designaremos los espacios normados por letras $H, K, G, \cdots$ y sin peligro de confusión, notaremos la norma de todos ellos por $\|\ \|$, a menos que sea preciso distinguir entre dos normas de un mismo espacio. Representaremos por θ al vector nulo de cualquier espacio y por $x, y, z, \cdots$ los vectores (también los llamaremos puntos), eligiendo letras griegas $\alpha, \beta, \cdots$ para los escalares u operadores reales.

Un espacio normado completo (como métrico, por supuesto) se denomina *espacio de Banach* y uno euclídeo completo *espacio de Hilbert*.

Si el espacio normado (o euclídeo) es el constituido únicamente por el vector θ, decimos que es *trivial*. De una vez y para evitar el tenerlo que advertir en cada caso, todos los espacios normados que consideraremos serán no triviales. Cuando se trata de subespacios vectoriales sí habrá necesidad de hacer la salvedad.

Comenzamos por investigar la naturaleza de las esferas y las consecuencias que ello trae.

Sean, pues, H un espacio normado, $a \in H$ y $r > 0$. Veamos que la esfera abierta $N(a; r)$ siempre contiene puntos distintos de a y que la superficie esférica $S(a; r)$ no es vacía. En efecto, basta con mostrar un punto en cada caso. Tomemos un $x \in H$ con $x \neq \theta$. Es inmediato comprobar que

$$a + \frac{r}{2\|x\|} x \in N(a; r), a + \frac{r}{\|x\|} x \in S(a; r).$$

Podemos decir entonces que las esferas son "llenas" o, lo que es lo mismo, que H carece de puntos aislados (contrástese con un espacio métrico discreto).

Esto implica que, si A es un conjunto cualquiera de H, todo punto interior de A es punto de acumulación de A (véase 2.3), es decir

$$\mathring{A} \subset A'.$$

El recíproco no es, por supuesto, cierto.

De aquí extraemos una bonita consecuencia. Supongamos que A es un conjunto abierto y no vacío de H. Entonces $A = \mathring{A}$ y tenemos

$$A \subset A';$$

clausurando y recordando que A' es cerrado (corolario 1′ de 2.4),

$$\bar{A} \subset A';$$

pero, por el Teorema 1 de 2.4, $A' = (\bar{A})'$ y como siempre $(\bar{A})' \subset \bar{A}$, concluimos que

$$\bar{A} = (\bar{A})'.$$

Esto quiere decir, en resumen, que la clausura de todo conjunto abierto no vacío es un conjunto perfecto (véase 2.4).

Volvamos a considerar una esfera abierta $N(a;r)$ en H. La inclusión obvia $N(a;r) \subset \bar{N}(a;r)$ implica, clausurando, $\overline{N(a;r)} \subset \bar{N}(a;r)$. Por otra parte, $\bar{N}(a;r) = N(a;r) \cup S(a;r)$; tomemos un punto $x \in S(a;r)$, es decir $\|x-a\| = r$ y demostremos que es de adherencia de $N(a;r)$.

En efecto, dado $\varepsilon > 0$, se comprueba directamente que el punto

$$z = a + (1 - \varepsilon/_{2r})\,(x-a)$$

es tal que

$$z \in N(a;r) \text{ y } \|z-x\| < \varepsilon.$$

Hemos deducido pues que

$$\overline{N(a;r)} = \bar{N}(a;r).$$

Podemos agregar, en virtud de lo establecido antes, que una esfera cerrada es un conjunto perfecto, por ser la clausura de un abierto. Además, como

$$S(a;r) = \overline{N}(a;r) - N(a;r),$$

obtenemos también que la frontera

$$\beta[N(a;r)] = S(a;r)$$

(véase F_4 de 2.5), lo cual trae como consecuencia que $S(a;r)$ es un conjunto nada-denso, por ser la frontera de un abierto, según el Teorema 1 de 2.7.

Finalmente, veamos que el diámetro $\delta[N(a;r)] = 2r$. En efecto, sabemos que $\delta[N(a;r)] \leq 2r$; cualquier número menor que $2r$ puede representarse como $2r-\varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$. Tomemos un $z \in H$ con $||z|| = 1$ (basta con hacer $z = \frac{1}{||x||} x$, para un $x \neq \theta$), entonces los puntos

$$x = a + (r - {}^{\varepsilon}/_{4})z, \; y = a - (r - {}^{\varepsilon}/_{4})z$$

pertenecen ambos a $N(a;r)$ y se verifica directamente que

$$||x-y|| = 2r - {}^{\varepsilon}/_{2} > 2r - \varepsilon.$$

En virtud del lema 1 de 4.1, también es $\delta[\overline{N}(a;r)] = 2r$.

Se destaca claramente lo que habíamos anunciado sobre la predictibilidad intuitiva de los espacios normados.

El lema siguiente es un caso particular de resultados poderosos que serán establecidos más adelante, no obstante, conviene introducirlo ahora por razones técnicas.

Lema 1. Si $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ son sucesiones en el espacio normado H, tales que $x_n \to x$, $y_n \to y$, $\alpha, \beta \in R$, entonces $\alpha x_n + \beta y_n \to \alpha x + \beta y$.

DEMOSTRACIÓN. Si $\alpha = \beta = 0$, entonces $\alpha x_n + \beta y_n = \alpha x + \beta y = \theta$ y la tesis se cumple trivialmente.

Supongamos que al menos uno, α ó β es distinto de cero, en cuyo caso $|\alpha| + |\beta| > 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, podemos hallar un $\nu \in N$ tal que

$$\forall n \geq \nu : ||x_n - x|| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|}, \; ||y_n - y|| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|};$$

luego,

$$\forall n \geq \nu : ||(\alpha x_n + \beta y_n) - (\alpha x + \beta y)|| \leq |\alpha| \, ||x_n - x|| + |\beta| \, ||y_n - y|| < \varepsilon.$$

Considerando al espacio normado H como métrico, es claro que cualquier subconjunto no vacío de H constituye un espacio métrico de la manera acostumbrada (1.4), es decir, un subespacio métrico de H, y, como tal, sabemos manejarlo. Pero ahora nos interesan los subespacios normados de H; vale decir, un subconjunto S de H que sea, a su vez, un espacio normado con respecto a las mismas operaciones algebraicas y norma de H. Entonces S debe ser un subespacio vectorial de H y con eso basta, ya que, evidentemente, la norma de H, restringida a S, constituye una norma para S.

De aquí en adelante, a menos que se diga expresamente lo contrario, al hablar de subespacios de H, nos referimos siempre a subespacios vectoriales normados de H.

Recordemos el elemental pero útil criterio, según el cual, un subconjunto no vacío S de H es un subespacio vectorial si y sólo si

$$\forall x, y \in S,$$
$$\forall \alpha, \beta \in R : \alpha x + \beta y \in S.$$

Ejemplos triviales de subespacios de H son $\{\theta\}$ y el propio H.

Se nota pues que los subespacios de H son conjuntos muy particulares de ese espacio normado y cabe preguntarse acerca de su naturaleza topológica. A fin de dilucidarla, procedemos a demostrar un par de interesantes teoremas y un lema que merecerá ciertos comentarios.

Teorema 1. Si S es un subespacio de H, entonces su clausura $\bar{S}$ es también un subespacio.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos $x, y \in \bar{S}$, $\alpha, \beta \in R$ cualesquiera.

En virtud del corolario 2′ de 5.1, existen sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ en S tales que $x_n \to x$, $y_n \to y$.

Ahora bien, como S es un subespacio, la sucesión $\{\alpha x_n + \beta y_n\}$ está en S y, por el lema 1, $\alpha x_n + \beta y_n \to \alpha x + \beta y$.

Aplicando de nuevo el corolario 2′ de 5.1, concluimos que $\alpha x + \beta y \in \bar{S}$.

Teorema 2. Todo subespacio que no sea igual a H es un conjunto fronterizo.

DEMOSTRACIÓN. Sea S un subespacio y supongamos que $\mathring{S} \neq \phi$.

Tomando entonces un $a \in \mathring{S}$, debe existir un $r > 0$ tal que

$$N(a; r) \subset S.$$

Sabemos que, necesariamente, $\theta \in S$ y si $x \in H$ es un punto cualquiera con $x \neq \theta$, elijamos un $t \in R$ tal que

$$0 < t < \frac{r}{\|x\|}.$$

Se comprueba directamente que $z = a + tx \in N(a; r)$; o sea que $z \in S$, de donde se deduce, por ser S un subespacio, que también

$$x = \frac{1}{t}(z-a) \in S.$$

En resumen, hemos demostrado que, si $\overset{\circ}{S} \neq \phi$, entonces $S = H$. De manera que, si S es un subespacio que no es igual a H, necesariamente $\overset{\circ}{S} = \phi$, lo que equivale a decir que S es un conjunto fronterizo (P_6 de 2.7).

Como consecuencia del teorema precedente, observamos que, si S es un subespacio que no coincide con H, entonces S no puede ser abierto, ya que, si lo fuese, tendríamos $S = \phi$ (P_7 de 2.7) lo que es imposible porque siempre $\theta \in S$. Sí puede suceder, en cambio, que S sea cerrado, en cuyo caso S será un conjunto nada-denso (P_4 de 2.7). Veremos más adelante, por ejemplo, que si S es de dimensión finita, entonces es cerrado.

El lema siguiente puede resultar algo desconcertante a primera vista, ya que el resultado que establece no parece tener mayor significación. No obstante, de él obtendremos, en 7.4, una conclusión que nos atrevemos a calificar de espectacular y que confiere a la teoría una armonía extraordinaria.

Lema 2. (Riesz). Si S es un subespacio cerrado que no coincide con H, entonces, a cada $\alpha \in R$ con $0 < \alpha < 1$, corresponde un $z \in H$ con $\|z\| = 1$ y tal que

$$\forall x \in S : \|x-z\| > \alpha.$$

Demostración. Sea $\alpha \in R$ con $0 < \alpha < 1$.

Como S no es igual a H, tomemos un punto $x_1 \in H-S$. Ahora bien, considerando que S es cerrado y que $x_1 \notin S$, el Teorema 2 b) de 2.4 nos dice que

$$k = d(x_1, S) > 0,$$

donde d es la métrica en H, inducida por su norma.

Como $0 < \alpha < 1$ se tiene que $k < {}^{k}/_{\alpha}$, de donde, por definición de $d(x_1, S)$, debe existir un $x_0 \in S$ tal que

$$0 < h = ||x_1 - x_0|| < {}^{k}/_{\alpha}.$$

Consideremos el punto $z = {}^{1}/_{h}\ (x_1 - x_0)$.

Se verifica entonces, para todo $x \in S$, $hx + x_0 \in S$ (por ser S un subespacio), lo que implica

$$||x - z|| = {}^{1}/_{h}\ ||hx - (x_1 - x_0)|| = {}^{1}/_{h}\ ||(hx + x_0) - x_1|| \geq {}^{k}/_{h} > \alpha.$$

7.2. CONVEXIDAD Y POLI-CONECTIVIDAD

Aprovechando la estructura algebraica de un espacio normado H, podemos considerar en él cierto tipo especial de arcos (véase 6.5) que resulta muy útil y relevante.

Tomemos un par de puntos $x, y \in H$ cualesquiera y definamos la función $f : [0, 1] \to H$ tal que

$$\forall t \in [0,1] : f(t) = x + t(y - x).$$

Es inmediato que f es continua en $[0, 1]$, ya que la relación

$$\forall t, t' \in [0, 1] : ||f(t) - f(t')|| = ||y - x|| \cdot |t - t'|$$

indica que f satisface una condición de Lipschitz en $[0, 1]$. El rango de f es pues un arco, cuyos extremos son claramente $f(0) = x$, $f(1) = y$, que denominamos *segmento de extremos x, y* y designamos por

$$[x, y].$$

Estas consideraciones implican, de paso, que H es arco-conexo y, por tanto, también conexo (Teorema 2 de 6.5), pero adelante obtendremos resultados más poderosos.

Todo segmento, por ser un arco, es un conjunto conexo, arco-conexo y compacto.

En particular, si H es la recta real, es evidente que el segmento de extremos x, y es precisamente el intervalo cerrado $[x, y]$ (suponiendo $x \leq y$). Así pues, la notación adoptada no da lugar a confusión.

Geométricamente, el segmento $[x, y]$ en R^2 ó R^3 es claramente el segmento de recta que une los puntos x, y.

Definimos ahora una clase de conjuntos que desempeñan un papel importante en la teoría.

Se dice que un conjunto no vacío A, de un espacio normado H, es *convexo* si

$$\forall x, y \in A : [x, y] \subset A.$$

Se intuye que un conjunto convexo debe ser de "una sola pieza" y además "abombado", es decir, no tiene "hundidos".

Un conjunto constituido por un solo punto es obviamente convexo, ya que $[x, x] = \{x\}$.

Otro ejemplo evidente es el de un subespacio S de H; si $x, y \in S$, entonces $x + t(y-x) = (1-t)x + ty \in S$, para todo $t \in [0, 1]$, es decir, $[x, y] \subset S$ y S es convexo. En particular, el espacio H es convexo.

Teniendo en cuenta que un segmento es un arco, observamos de inmediato que todo conjunto convexo es arco-conexo y, por tanto, conexo (Teorema 2 de 6.5). Es fácil imaginarse, sin embargo, conjuntos arco-conexos que no son convexos; en tal sentido véase el ejercicio 12.

Todo conjunto convexo en la recta real es un intervalo (por ser conexo) y, recíprocamente, es obvio que un intervalo es convexo. Tenemos pues que conectividad, arco-conectividad y convexidad son propiedades equivalentes en la recta real y los únicos conjuntos que las poseen son los intervalos.

Lema 1. Si A es un conjunto convexo, en un espacio normado H, entonces su interior $\mathring{A}$ y su clausura $\bar{A}$ son convexos.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos $x, y \in \bar{A}$, $t \in [0, 1]$, cualesquiera.

En virtud del corolario 2′ de 5.1, existen sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ en A con $x_n \to x$, $y_n \to y$, lo cual implica, por el lema 1 de 7.1, que

$$(1-t)x_n + ty_n \to (1-t)x + ty = x + t(y-x);$$

pero, como A es convexo, la sucesión $\{(1-t)x_n + ty_n\}$ está en A y, de nuevo por el corolario 2′ de 5.1, $x + t(y-x) \in \bar{A}$.

De manera que $\bar{A}$ es convexo.

Sean ahora $x, y \in \mathring{A}$; nos proponemos demostrar que $[x, y] \subset \mathring{A}$.

Con tal fin, tomemos un $z = x + t(y-x) \in [x, y]$, para algún $t \in [0, 1]$ cualquiera.

Podemos hallar un $r > 0$ tal que $N(x; r) \subset A$, $N(y; r) \subset A$. Luego, si $\omega \in N(z; r)$, entonces $\|\omega - z\| < r$ y se comprueba directamente que $x_1 = x + \omega - z \in N(x; r)$, $y_1 = y + \omega - z \in N(y; r)$, de donde $x_1, y_1 \in A$ y, como éste es convexo, $[x_1, y_1] \subset A$, lo cual implica que $\omega = x_1 + t(y_1 - x_1) \in A$.

En resumen, $N(z; r) \subset \mathring{A}$, o sea que $z \in \mathring{A}$, pero z es un punto cualquiera de $[x, y]$, luego $[x, y] \subset \mathring{A}$ y $\mathring{A}$ es convexo.

Lema 2. Toda esfera abierta o cerrada, de un espacio normado H, es un conjunto convexo.

DEMOSTRACIÓN. Sean $a \in H$ y $r > 0$ y consideremos la esfera abierta $N(a; r)$.

Tomemos $x, y \in N(a; r)$, $t \in [0, 1]$ cualesquiera y se tiene

$$\|(x+t(y-x))-a\| = \|(1-t)(x-a)+t(y-a)\| \leq (1-t)\|x-a\|+t\|y-a\|$$
$$< (1-t)r + tr = r,$$

o sea que

$$x + t(y-x) \in N(a; r),$$

es decir

$$[x, y] \subset N(a; r) \text{ y } N(a; r)$$

es un conjunto convexo.

En cuanto a la esfera cerrada, sabemos que es la clausura de la abierta y, por el lema 1, es también convexa.

De manera pues que, por ser convexa, toda esfera abierta de un espacio normado es un conjunto conexo y arco-conexo. Esto implica, en virtud del Teorema 1 de 3.4, y del Teorema 4 de 6.5, un resultado que merece destacarse:

Teorema 1. Todo espacio normado es conexo, arco-conexo, localmente conexo y localmente arco-conexo.

En 6.6 vimos que una función uniformemente continua no satisface, necesariamente, una condición de Lipschitz. El interesante teorema que presentamos a continuación nos indica que, si la función es uniformemente continua en un conjunto convexo, entonces "casi" satisface una condición de Lipschitz.

Teorema 2. H es un espacio normado y (E, d) es métrico. Sea la función $f: A \subset H \to E$, donde A es convexo. Entonces f es uniformemente continua en A si y sólo si a cada $\varepsilon > 0$ corresponde un $\alpha > 0$ tal que

$$\forall x, y \in A : d(f(x), f(y)) < \alpha \|x-y\| + \varepsilon.$$

Demostración. Probaremos primero que la propiedad expresada en el enunciado implica la continuidad uniforme, para lo cual no hace falta que A sea convexo.

Dado $\varepsilon > 0$, existe, por hipótesis, un $\alpha > 0$ tal que

$$\forall x, y \in A : d(f(x), f(y)) < \alpha \|x-y\| + \varepsilon/2.$$

Si hacemos $\delta = \varepsilon/2\alpha$ se verifica entonces que $\forall x, y \in A$ con $\|x-y\| < \delta$: $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. O sea que f es uniformemente continua en A.

Recíprocamente, supongamos que f es uniformemente continua en A y sea $\varepsilon > 0$. Existe un $\delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in A \text{ con } \|x-y\| < \delta : d(f(x), f(y)) < \varepsilon. \tag{1}$$

Tomemos $x, y \in A$ cualesquiera y sea n el número natural que satisface

$$(n-1)\delta \leq \|x-y\| < n\delta \tag{2}$$

(n es el mínimo número natural que cumple $n\delta > \|x-y\|$).

Ahora bien, como A es convexo, $[x, y] \subset A$, de manera que todos los puntos de la secuencia

$$x_0 = x,\ x_1 = x + 1/n(y-x),\ x_2 = x + 2/n(y-x),\ \ldots,\ x_n = x + n/n(y-x) = y$$

pertenecen a A, por estar en $[x, y]$.

Por otra parte, aplicando (2),

$$\|x_k - x_{k-1}\| = 1/n \|x-y\| < \delta \ (k = 1, 2, \ldots, n).$$

lo cual implica, por (1), que

$$d(f(x_k), f(x_{k-1})) < \varepsilon \ (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Luego, aplicando reiteradamente la desigualdad triangular de la métrica, resulta

$$d(f(x), f(y)) \leq \sum_{k=1}^{n} d(f(x_{k-1}), f(x_k)) < n\varepsilon;$$

pero, de la primera mitad de la desigualdad (2) se deduce que

$$n < 1/\delta \|x-y\| + 1,$$

entonces

$$d(f(x), f(y)) < (\varepsilon/\delta) \, ||x-y|| + \varepsilon,$$

recordando que los puntos $x, y \in A$ son cualesquiera.

Se nota que el teorema precedente constituye una caracterización de las funciones uniformemente continuas en conjuntos convexos.

En 6.6 se puso de manifiesto, mediante un ejemplo, que si $f : E \to F$ es uniformemente continua en E, donde (E, d) y (F, d') son espacios métricos y A es un conjunto acotado del dominio, no es, en general, cierto que $f(A)$ es acotado. No obstante, como consecuencia del Teorema 2, veremos en seguida que si (E, d) es un espacio normado las imágenes de conjuntos acotados sí resultan acotadas.

Corolario 2'. H es un espacio normado y (E, d) es métrico. Si $f : H \to E$ es uniformemente continua en H y A es un conjunto acotado de H, entonces $f(A)$ es un conjunto acotado de (E, d).

DEMOSTRACIÓN. Tomando $\varepsilon = 1$ y aplicando el Teorema 2, existe un $\alpha > 0$ tal que

$$\forall x, y \in H : d(f(x), f(y)) < \alpha \, ||x-y|| + 1,$$

ya que H es convexo. En particular,

$$\forall x, y \in A : d(f(x), f(y)) < \alpha \, ||x-y|| + 1,$$

pero A es acotado, luego existe un $k > 0$ (véase 4.1) tal que

$$\forall x, y \in A : ||x-y|| \leq k.$$

Se deduce entonces que

$$\forall x, y \in A : d(f(x), f(y)) < \alpha k + 1,$$

lo que demuestra que $f(A)$ es acotado.

El concepto de segmento nos permite introducir en un espacio normado cualquiera la idea de "línea quebrada" que nos resulta familiar en geometría elemental.

Dada una colección finita de puntos $z_0, z_1, \cdots, z_n$ de un espacio normado H, llamamos *poligonal* al conjunto

$$[z_0, z_1, \cdots, z_n] = \bigcup_{i=1}^{n} \text{(de unión de conjuntos) } [z_{i-1}, z_i];$$

los puntos z_i reciben el nombre de *vértices* de la poligonal y también decimos que z_0 y z_n están *unidos* por la poligonal $[z_0, z_1, \cdots, z_n]$.

En particular, un segmento es una poligonal.

La interpretación geométrica de poligonal en R^2 y R^3 es evidente (línea quebrada) y, en R, una poligonal $[z_0, z_1, \cdots, z_n]$ no es otra cosa que un intervalo cerrado.

El nuevo concepto da origen a otro tipo de conectividad que es importante en Análisis.

Decimos que un conjunto no vacío A, de un espacio normado H, es *poli-conexo* si dos cualesquiera de sus puntos están unidos por una poligonal contenida en A. O sea que, si $x, y \in A$, existe un conjunto finito de puntos $z_0, z_1, \cdots, z_n \in A$ tales que $z_0 = x$, $z_n = y$, $[z_0, z_1, \cdots, z_n] \subset A$.

Considerando que todo segmento es una poligonal, es claro que un conjunto convexo es poli-conexo. Así pues, el conjunto constituido por un solo punto es poli-conexo, lo mismo que un subespacio, incluyendo, por supuesto, a H.

Por el contrario, un conjunto poli-conexo no es, en general, convexo (véase el ejercicio 12). De manera que la poli-conectividad es una propiedad menos restrictiva que la convexidad.

Veamos cómo se relaciona con la arco-conectividad.

Teorema 3. Todo conjunto poli-conexo es arco-conexo.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un conjunto poli-conexo A en un espacio normado H.

Empleando la notación introducida en el lema 1 de 6.5, todo se reduce a demostrar que

$$\forall x, y \in A : x \overset{A}{\sim} y.$$

En efecto, tomemos dos puntos $x, y \in A$ cualesquiera. Como A es poli-conexo, existe un conjunto finito de puntos $z_0, z_1, \cdots, z_n \in A$ tales que $z_0 = x$, $z_n = y$,

$$[z_0, z_1, \cdots, z_n] \subset A.$$

Ahora bien, sabiendo que un segmento es un arco, tenemos $z_0 \overset{A}{\sim} z_1$, $z_1 \overset{A}{\sim} z_2$, $\cdots$, $z_{n-1} \overset{A}{\sim} z_n$, lo cual implica, en virtud de la transitividad de $\overset{A}{\sim}$ (lema 1 de 6.5) que $z_0 \overset{A}{\sim} z_n$.

Tal como se intuye geométricamente, existen conjuntos arco-conexos que no son poli-conexos; por ejemplo, véase el ejercicio 17. No obstante, proporcionaremos un recíproco parcial del Teorema 3 más adelante.

Por lo pronto, obtenemos un corolario inmediato.

Corolario 3'. Todo conjunto poli-conexo es conexo.

DEMOSTRACIÓN. El teorema anterior junto con el Teorema 2 de 6.5.

Antes de establecer bajo qué condiciones un conjunto arco-conexo o conexo es poli-conexo, requerimos un resultado auxiliar de cierto interés propio. Para motivarlo, supongamos que tenemos conjuntos A, B, donde $B \subset A$ y A es abierto (pueden estar en un espacio métrico); a cada punto $x \in B$, como también $x \in A$, corresponde un $r > 0$ tal que $N(x; r) \subset A$. Pero, en general, r depende de x y no tenemos derecho a suponer que exista un mismo r con $N(x; r) \subset A$, $\forall x \in B$. Sin embargo, tal cosa sucede si B es compacto: ejercicio 47 del capítulo V. Aun cuando el resultado es válido en un espacio métrico cualquiera, presentamos la demostración en un espacio normado, pudiendo ésta transcribirse a un espacio métrico cuyas esferas abiertas sean conexas.

Lema 3. Sean A y C conjuntos de un espacio normado H, tales que A es abierto, C es compacto y $C \subset A$; entonces existe un $r > 0$ tal que

$$\forall x \in C : N(x; r) \subset A.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $A = H$ cualquier número real $r > 0$ satisface la condición. Supongamos, pues, que A es un subconjunto propio de H.

Como H es conexo (Teorema 1), la frontera $\beta(A) \neq \phi$ (véase 3.1). Por otra parte, $\beta(A)$ es cerrado (F_1 de 2.5), y siendo A abierto, $A \cap \beta(A) = \phi$ (F_7 de 2.5), lo que implica $C \cap \beta(A) = \phi$, ya que $C \subset A$.

En consecuencia, aplicando lo establecido al final de 6.3,

$$r = d(C, \beta(A)) > 0.$$

En virtud de la definición de r, es claro que, si

$$x \in C, y \in \beta(A),$$

entonces

$$\|x - y\| \geq r.$$

Tomemos un $x \in C$ cualquiera y probemos que

$$N(x; r) \subset A.$$

En efecto, por la observación anterior, $\beta(A) \cap N(x; r) = \phi$; por otra parte $A \cap N(x; r) \neq \phi$, ya que $x \in A \cap N(x; r)$. Ahora bien, si

$$(H - A) \cap N(x; r) \neq \phi,$$

entonces, como $N(x; r)$ es conexo, ello implicaría

$$\beta(A) \cap N(x; r) \neq \phi$$

(Teorema 1 de 3.1) obteniéndose una contradicción. De manera que debe ser $(H - A) \cap N(x; r) = \phi$, lo que equivale a $N(x; r) \subset A$.

Teorema 4. En un espacio H, todo conjunto abierto y arco-conexo es poli-conexo.

Demostración. Consideremos un conjunto A abierto y arco-conexo en H.

Tomemos un par de puntos $x, y \in A$ cualesquiera y construyamos una poligonal contenida en A que los una.

Como A es arco-conexo, existe una función $f : [0, 1] \to H$, continua en $[0, 1]$, con $f(0) = x$, $f(1) = y$, cuyo rango C (el arco) es tal que $C \subset A$.

Ahora bien, C es compacto, por ser un arco, y, en virtud del lema 3, existe un $r > 0$ (aquí es donde se utiliza que A es abierto) tal que

$$\forall x \in C : N(x; r) \subset A. \qquad (1)$$

Pero f es uniformemente continua en $[0, 1]$ (Teorema 4 de 6.6), luego existe un $\delta > 0$ tal que

$$\forall t, t' \in [0, 1] \text{ con } |t - t'| < \delta : \|f(t) - f(t')\| < r. \qquad (2)$$

Tomemos ahora un $n \in N$ con $1/n < \delta$ y consideremos los siguientes puntos de $[0, 1]$:

$$0, 1/n, 2/n, \ldots, n/n = 1.$$

Ya que $|i/n - (i-1)/n| = 1/n < \delta$ $(i = 1, \ldots, n)$, obtenemos, por (2),

$$\|f(i/n) - f((i-1)/n)\| < r \;\; (i = 1, \ldots, n). \qquad (3)$$

Hemos construido una familia finita de puntos

$$z_i = f(i/n) \in C \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

y (3) se traduce en

$$\|z_i - z_{i-1}\| < r \quad (i = 1, \cdots, n),$$

lo que equivale a

$$z_i \in N(z_{i-1}; r) \quad (i = 1, \cdots, n);$$

pero, como toda esfera abierta es convexa (lema 2), se deduce que

$$[z_{i-1}, z_i] \subset N(z_{i-1}; r) \quad (i = 1, \cdots, n),$$

de donde, por (1),

$$[z_{i-1}, z_i] \subset A \quad (i = 1, \cdots, n),$$

lo que implica

$$\bigcup_{i=1}^{n} [z_{i-1}, z_i] = [z_0, z_1, \cdots, z_n] \subset A,$$

sabiendo que

$$z_0 = f(0) = x, \; z_n = f(1) = y.$$

Un dibujo ilustrativo de la demostración anterior puede facilitar la comprensión del lector.

Corolario 4′. En un espacio normado H, todo conjunto abierto y conexo es poli-conexo.

DEMOSTRACIÓN. Como H es localmente arco-conexo (Teorema 1), se aplica el Teorema 6 de 6.5 seguido del Teorema precedente.

En resumen, todo conjunto poli-conexo es arco-conexo y conexo. Recíprocamente, un conjunto abierto y conexo es arco-conexo y poli-conexo.

O sea que, para un conjunto abierto, la conectividad, arco y poli-conectividad son propiedades equivalentes.

Finalmente, se suscita la pregunta sobre si la imagen continua o uniformemente continua de un poli-conexo es poli-conexa. En general, la respuesta es negativa en ambos casos (véase el ejercicio 18)

7.3. TRANSFORMACIONES LINEALES

Si H y K son espacios vectoriales (no necesariamente provistos de normas), se recuerda que una transformación lineal es una función $T : H \to K$ que posee la propiedad de que

$$\forall x, y \in H,$$
$$\forall \alpha, \beta \in R : T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

El núcleo de T es el conjunto

$$Ker(T) = T^{-1}\{\theta\} = \{x \in H \mid T(x) = \theta\}$$

y se comprueba fácilmente que es un subespacio de H, al igual que el rango $T(H)$.

También resulta inmediato verificar que T es inyectiva si y sólo si su núcleo $Ker(T) = \{\theta\}$.

Si T es biyectiva se dice que es no-singular y, de lo contrario, se llama singular. En caso de ser no-singular, se comprueba directamente que la función inversa $T^{-1} : K \to H$ es también una transformación lineal.

Si $S : H \to K$ es otra transformación lineal y $\alpha, \beta \in R$, la función $\alpha T + \beta S : H \to K$, definida

$$\forall x \in H : (\alpha T + \beta S)(x) = \alpha T(x) + \beta S(x),$$

es una transformación lineal.

Si G es otro espacio vectorial y $T' : K \to G$ una transformación lineal, no hay dificultad en verificar que la función compuesta $T' \circ T : H \to G$ es una transformación lineal.

Finalmente, designaremos siempre por $I : H \to H$ a la transformación lineal idéntica ($\forall x \in H : I(x) = x$) y por $\Theta : H \to K$ a la transformación lineal nula ($\forall x \in H : \Theta(x) = \theta$) cualesquiera sean los espacios H y K, sin mayor peligro de confusión.

Todos estos hechos, que hemos listado como recordatorio, son de carácter puramente algebraico. Aquí nos ocuparemos de propiedades topológicas de las transformaciones lineales; concretamente, de su continuidad, para lo cual los espacios que intervienen deben ser normados. Así pues, durante toda esta sección, los espacios H y K son normados.

Comenzamos con un resultado verdaderamente sorprendente.

Teorema 1. Si la transformación lineal $T : H \to K$ es continua en un punto de H, entonces es uniformemente continua en H.

Demostración. Supongamos que T es continua en el punto $x_0 \in H$.

Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in H \text{ con } \|x - x_0\| < \delta : \|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Tomemos ahora un par de puntos $x, y \in H$ con $\|x-y\| < \delta$. Tenemos entonces que

$$\|(x-y+x_0) - x_0\| = \|x-y\| < \delta,$$

de donde, aplicando (1) y el hecho de que T es una transformación lineal,

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x-y+x_0) - T(x_0)\| < \varepsilon.$$

Vemos, pues, que las transformaciones lineales tienen un comportamiento que podríamos calificar de extremista: son uniformemente continuas en H o no son continuas en punto alguno de H. Debido a esto, de aquí en adelante diremos simplemente que una transformación lineal es continua, sin que haga falta especificar dónde.

Como si esto fuera poco, demostramos en seguida que toda transformación lineal continua satisface una condición de Lipschitz en su dominio, lo cual sabemos no sucede a cualquier función uniformemente continua.

Por comodidad, haremos uso del Teorema 2 de 7.2, aunque es sencillo demostrarlo directamente y se recomienda al lector intentarlo.

Teorema 2. Una transformación lineal $T : H \to K$ es continua si y sólo si existe un número real $M > 0$ tal que

$$\forall x \in H : \|T(x)\| \leq M \|x\|.$$

Demostración. Si T satisface la propiedad en el enunciado entonces

$$\forall x, y \in H : \|T(x) - T(y)\| = \|T(x-y)\| \leq M \|x-y\|;$$

de manera que T es uniformemente continua en H por satisfacer una condición de Lipschitz en H.

Recíprocamente, supongamos que T es uniformemente continua en H.

Como H es convexo, aplicamos el Teorema 2 de 7.2 con $\varepsilon = 1$. Existe pues un $\alpha > 0$ tal que

$$\forall x, y \in H : \|T(x) - T(y)\| < \alpha \|x-y\| + 1;$$

luego, si tomamos $y = \theta$, con lo cual $T(y) = \theta$, se verifica

$$\forall x \in H, x \neq \theta : \frac{1}{||x||} ||T(x)|| = \left\| T\left(\frac{x}{||x||}\right)\right\| < \alpha + 1,$$

de donde, haciendo $\alpha + 1 = M > 0$, obtenemos

$$||T(x)|| < M \, ||x||;$$

pero si $x = \theta$, ambos miembros de la desigualdad son cero y podemos concluir

$$\forall x \in H : ||T(x)|| \leq M \, ||x||.$$

El teorema que sigue nos proporciona otra caracterización de las transformaciones lineales continuas como las únicas que "transportan" acotados a acotados. Por esto se las llama frecuentemente transformaciones acotadas.

Teorema 3. Una transformación lineal $T : H \to K$ es continua si y sólo si, para todo conjunto acotado A de H, $T(A)$ es acotado.

DEMOSTRACIÓN. Si T es uniformemente continua en H y A es un conjunto acotado de H, entonces $T(A)$ es acotado, en virtud del corolario 2′ de 7.2.

Recíprocamente, como la superficie esférica $S(\theta; 1)$ es acotada, el conjunto $T[S(\theta; 1)]$ es acotado y, por el Teorema 1 de 4.1, existe un $M > 0$ tal que

$$T[S(\theta; 1)] \subset N(\theta; M);$$

vale decir,

$$\forall x \in H \text{ con } ||x|| = 1 : ||T(x)|| < M.$$

Luego,

$$\forall x \in H \text{ con } x \neq \theta : \frac{1}{||x||} ||T(x)|| = \left\| T\left(\frac{x}{||x||}\right)\right\| < M,$$

o sea

$$||T(x)|| < M \, ||x||,$$

de donde

$$\forall x \in H : ||T(x)|| \leq M \, ||x||$$

y T es continua por el Teorema 2.

El Teorema 2 nos ayuda a establecer un útil criterio sobre la continuidad de la inversa de una transformación lineal no-singular.

Teorema 4. Si $T : H \to K$ es una transformación lineal sobreyectiva (no necesariamente continua), entonces T es no-singular y T^{-1} es continua si y sólo si existe un $m > 0$ tal que

$$\forall x \in H : m \|x\| \leq \|T(x)\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que T es no-singular y que $T^{-1} : K \to H$ es continua. Luego, en virtud del Teorema 2, existe un $M > 0$ tal que

$$\forall y \in K : \|T^{-1}(y)\| \leq M \|y\|,$$

de donde

$$\forall x \in H : {}^1/_M \|x\| = {}^1/_M \|T^{-1}[T(x)]\| \leq \|T(x)\|.$$

Recíprocamente, supongamos que existe un $m > 0$ tal que

$$\forall x \in H : m \|x\| \leq \|T(x)\|; \qquad (1)$$

luego, si $T(x) = \theta$, obtenemos $0 \leq m \|x\| \leq 0$, de donde $x = \theta$. O sea que el núcleo de T está constituido únicamente por θ, lo cual implica que T es inyectiva y, como también es sobreyectiva por hipótesis, T es no-singular.

Por otra parte, aplicando (1) tenemos

$$\forall y \in K : \|T^{-1}(y)\| \leq {}^1/_m \|T[T^{-1}(y)]\| = {}^1/_m \|y\|,$$

lo que nos dice que T^{-1} es continua (Teorema 2).

7.4. ISOMORFISMO TOPOLOGICO: ISOTOPIA

Recordemos que dos espacios vectoriales H y K son isomorfos si existe una transformación lineal no-singular $T : H \to K$. Desde un punto de vista algebraico, estos espacios son indistinguibles, pudiendo sólo diferir en la naturaleza específica de sus elementos (vectores). El isomorfismo identifica, por así decirlo, la estructura algebraica de ambos. Si H y K son además normados, su equivalencia natural como espacios métricos es el homeomorfismo uniforme. Si pretendemos, pues, que sean indistinguibles, tanto algebraica como topológicamente, debemos requerir que sean isomorfos y uni-

formemente homeomórficos. La combinación de estas dos relaciones de equivalencia da origen a la que mejor se ajusta a espacios normados.

Decimos que el espacio normado H es *topológicamente isomorfo* con el espacio normado K si existe una transformación lineal continua y no-singular $T : H \to K$ cuya inversa T^{-1} es también continua.

Dejamos al lector la rutinaria y fácil tarea de comprobar que el isomorfismo topológico es una relación de equivalencia entre espacios normados.

Con objeto de abreviar, cometeremos el abuso de lenguaje de llamar al isomorfismo topológico *isotopía*; diremos pues que dos espacios normados son *isótopos*, en lugar del aparatoso topológicamente isomorfos. Así mismo, una transformación lineal continua y no-singular con inversa continua será denominada brevemente una *isotopía*.

Se destaca de la definición que dos espacios isótopos son a la vez isomorfos, como espacios vectoriales, y uniformemente homeomórficos como espacios métricos.

Según se estableció en 6.6, si dos espacios métricos son uniformemente homeomórficos y uno de ellos es completo, entonces el otro también lo es. En particular, si dos espacios normados son isótopos y uno de ellos es de Banach (completo) el otro ha de serlo también. Vale decir, la isotopía preserva la completitud.

Los resultados de 7.3 provocan una elegante caracterización de la isotopía.

Teorema 1. Dos espacios normados H y K son isótopos si y sólo si existe una transformación lineal sobreyectiva $T : H \to K$ y números reales $m, M > 0$ tales que

$$\forall x \in H : m\,||x|| \leq ||T(x)|| \leq M\,||x||.$$

Demostración. Teoremas 2 y 4 de 7.3.

Sucede con frecuencia que un mismo espacio vectorial H admite dos normas $||\ ||_1$, $||\ ||_2$, dando origen a espacios normados H_1, H_2 respectivamente y, como caso particular del Teorema 1, podemos suministrar un criterio que caracterice su isotopía. Tenemos a mano la transformación lineal idéntica $I : H_1 \to H_2$, que es, por supuesto, no-singular; de manera que estos espacios serán isótopos si y sólo si existen números reales $m, M > 0$ tales que

$$\forall x \in H : m\,||x||_1 \leq ||x||_2 \leq M\,||x||_1.$$

Concentramos ahora nuestra atención en espacios normados de dimensión finita. Para éstos la situación se presenta mucho más sencilla y vere-

mos que poseen todas las propiedades topológicas establecidas para R^n en 5.4.

Recordemos primero que R^n es isomorfo con cualquier espacio vectorial H de dimensión finita n. En efecto, si elegimos una base $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ para H, se comprueba con toda facilidad que $T : R^n \to H$, tal que

$$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n : T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n,$$

es una transformación lineal no-singular que establece dicho isomorfismo. Teniendo en cuenta que el isomorfismo es una relación de equivalencia, esto trae como consecuencia que dos espacios vectoriales de una misma dimensión finita son siempre isomorfos.

Este resultado se extiende a la isotopía, pero su demostración requerirá el auxilio de un lema previo, que aprovechamos de probar con mayor generalidad de la que haremos uso.

Lema 1. Sean (E, d) un espacio métrico y H normado.

Si $f : A \subset E \to H$ es continua en A, entonces la función $||f|| : A \subset E \to R$, tal que

$$\forall x \in A : ||f||(x) = ||f(x)||,$$

es continua en A.

DEMOSTRACIÓN. Designemos por d' a la métrica en H inducida por la norma. Sabemos que la función $g : H \to R$, tal que

$$\forall x \in H : g(x) = d'(x, \theta) = ||x||,$$

es continua (uniformemente) en H y es claro que $||f|| = g \circ f$; luego $||f||$ es continua en A por el Teorema 1 de 6.2.

Teorema 2. Dos espacios normados de una misma dimensión finita son isótopos.

DEMOSTRACIÓN. Descartemos el caso de dimensión cero, que es cierto trivialmente.

Considerando que la isotopía es una relación de equivalencia (por tanto, simétrica y transitiva), basta con demostrar que cualquier espacio normado H, de dimensión finita $n \geq 1$, es isótopo con R^n.

Eligiendo una base $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ para H, sabemos que la transformación lineal $T : R^n \to H$, tal que

$$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n : T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n,$$

es no-singular. De manera que probaremos la isotopía haciendo uso del Teorema 1.

Primeramente, sumando las desigualdades (a) de 5.4, obtenemos

$$\forall(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n : \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n \, ||(x_1, x_2, \cdots, x_n)||. \qquad \text{(C)}$$

Designando por $k = \text{máx}\, \{||e_1||, ||e_2||, \cdots, ||e_n||\}$, es claro que $k > 0$ y se verifica

$$\forall(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n : ||T(x_1, x_2, \cdots, x_n)|| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, ||e_i|| \leq k \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

de donde, aplicando (C), tenemos

$$\forall(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n : ||T(x_1, x_2, \cdots, x_n)|| \leq (kn) \, ||(x_1, x_2, \cdots, x_n)||. \quad (1)$$

Aplicando el Teorema 2 de 7.3, (1) indica que T es continua.

Ahora bien, la superficie esférica $S = S(\theta; 1)$ en R^n es un conjunto compacto (corolario 3″ de 5.4) y, en virtud del lema 1, la función $||T|| : S \subset R^n \to R$ es continua en S. Luego, por el Teorema 3 de 6.3, $||T||$ alcanza un mínimo absoluto en algún punto $a \in S$; o sea que, si hacemos $m = ||T(a)|| \geq 0$, entonces

$$\forall x \in S : m \leq ||T(x)||;$$

pero, si tomamos un $x \in R^n$ cualquiera, con $x \neq \theta$, se tiene que $\dfrac{x}{||x||} \in S$, de donde

$$m \leq \left\| T\left(\frac{x}{||x||}\right) \right\| = \frac{1}{||x||} ||T(x)||.$$

De manera que

$$\forall x \in R^n : m \, ||x|| \leq ||T(x)|| \qquad (2)$$

(ya que la desigualdad de (2) es trivialmente válida para $x = \theta$ también).

Por último, nótese que $||a|| = 1$, lo cual implica que $a \neq \theta$ y, como T es no-singular, $T(a) \neq \theta$, o sea que $m = ||T(a)|| > 0$.

La no-singularidad de T y las desigualdades (1) y (2) demuestran, en virtud del Teorema 1, que R^n y H son isótopos.

Consecuencia inmediata de este teorema es que poco importa la norma que se elija para un espacio vectorial de dimensión finita; los espacios normados resultantes serán isótopos. Esta observación es de suficiente importancia para destacarla.

Corolario 2'. Todos los espacios normados que provienen de un mismo espacio vectorial de dimensión finita son isótopos entre sí.

Habiendo demostrado que cualquier espacio normado de dimensión finita n es isótopo con R^n y sabiendo que este último es completo (Teorema 2 de 5.4) sacamos una importante conclusión (recuérdense las consideraciones hechas al principio de esta sección) que también merece destacarse.

Teorema 3. Todo espacio normado de dimensión finita es de Banach (completo).

Corolario 3'. Todo subespacio de dimensión finita de un espacio normado es un conjunto cerrado.

DEMOSTRACIÓN. En virtud del Teorema 3, un subespacio de dimensión finita es completo, lo cual implica, por el Teorema 2 de 5.3 que es un conjunto cerrado.

Del corolario precedente se deduce, aplicando el Teorema 2 de 7.1, que todo subespacio de dimensión finita de un espacio normado H, que no coincida con H, es un conjunto cerrado y fronterizo, o sea, nada-denso (P_4 de 2.7). En particular, si H es de dimensión finita, entonces todos sus subespacios son cerrados y nada-densos. Recíprocamente, si H es un espacio de Banach y todos sus subespacios son cerrados, entonces H es de dimensión finita, pero la demostración de este resultado no será dada aquí por requerir conocimientos que van más allá de la intención de este capítulo.

El teorema que sigue pone de manifiesto un hecho importante.

Teorema 4. Si $T : H \to K$ es una transformación lineal y H es de dimensión finita, entonces T es continua.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ una base para H.

Dado un vector cualquiera $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ de H, definimos

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Es inmediato comprobar que $|| \; ||_1$ es una norma para H y se deja al lector. El espacio normado a que ésta da origen es isótopo con H, por el

corolario 2′, y, aplicando el criterio que se obtuvo en seguida del Teorema 1, deben existir números reales $m, M > 0$ tales que

$$\forall x \in H : m \, ||x||_1 \leq ||x|| \leq M \, ||x||_1. \tag{1}$$

Ahora bien, si $T(e_i) = \theta$ $(i = 1, \cdots, n)$, entonces T es la transformación nula que es continua por ser constante. De lo contrario,

$$0 < k = \text{máx} \{||T(e_1)||, \cdots, ||T(e_n)||\}$$

y se verifica, para todo $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ de H,

$$||T(x)|| = ||\sum_{i=1}^{n} x_i \, T(e_i)|| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot ||T(e_i)|| \leq k \, ||x||_1,$$

de donde, haciendo uso de (1),

$$||T(x)|| \leq \left(\frac{k}{m}\right) ||x||,$$

lo cual demuestra la continuidad de T, por el Teorema 2 de 7.3.

Vemos, pues, que toda transformación lineal cuyo dominio sea un espacio normado de dimensión finita es automáticamente continua, no importa cuál sea el codominio.

El Teorema 3 de 5.4, que constituye la propiedad topológica resaltante de R^n y lo diferencia de espacios métricos completos cualesquiera, se generaliza a espacios normados de dimensión finita.

Teorema 5. Todo conjunto acotado de un espacio normado de dimensión finita es precompacto.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que A es un conjunto acotado de un espacio normado H de dimensión finita n.

En virtud del Teorema 2, H es isótopo con R^n bajo una isotopía $T : R^n \to H$.

Ahora bien, como $T^{-1} : H \to R^n$ es una transformación lineal continua, $T^{-1}(A)$ es un conjunto acotado de R^n (Teorema 3 de 7.3) y, por el Teorema 3 de 5.4, $T^{-1}(A)$ es precompacto.

Por otra parte, T es uniformemente continua en R^n (Teorema 1 de 7.3), lo cual implica que el conjunto $A = T[T^{-1}(A)]$ es precompacto, en virtud del Teorema 2 de 6.6.

El teorema precedente, junto con el hecho de que un espacio normado de dimensión finita es completo, provoca la generalización a tales espacios de los corolarios 3′, 3″ y 3‴ de 5.4, con demostraciones idénticas y que, por tanto, omitimos.

Corolario 5′. Todo conjunto acotado de un espacio normado de dimensión finita es relativamente compacto.

Corolario 5″. (Heine-Borel). Todo conjunto cerrado y acotado en un espacio normado de dimensión finita es compacto.

Corolario 5‴. (Bolzano-Weierstrass). Todo conjunto infinito y acotado en un espacio normado de dimensión finita admite algún punto de acumulación.

No debe sorprender demasiado el que resultados tan propios de R^n sean generalizables a espacios normados de dimensión finita. Todo ello es consecuencia directa del fundamental Teorema 2. Al descubrir que todo espacio normado de dimensión finita n es isótopo con R^n se adquiere la certeza de que deberá poseer todas las propiedades algebraicas y topológicas de R^n, ya que la isotopía identifica ambas estructuras.

Lo que sí puede considerarse como poco menos que extraordinario y sorprendente es que la propiedad enunciada en el Teorema 5 caracteriza a los espacios normados de dimensión finita. Resulta casi misterioso, visto intuitivamente, el que esa propiedad del carácter puramente topológico pueda implicar un hecho evidentemente algebraico como lo es la finito-dimensionalidad. Esto y otras consecuencias interesantes se infieren del lema siguiente.

Lema 2. Si alguna esfera abierta en el espacio normado H es precompacta, entonces H es de dimensión finita.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe un punto $a \in H$ y un $r > 0$ tales que la esfera abierta $N(a;r)$ es un conjunto precompacto; luego su clausura, que es la esfera cerrada $\overline{N}(a;r)$, es también precompacta. Por último, $\phi \neq S(a;r) \subset \overline{N}(a;r)$, lo que nos dice que la superficie esférica $S(a;r)$ es precompacta (Teorema 2 de 4.2).

Definamos la función $f : S(a;r) \subset H \to H$ tal que

$$\forall x \in S(a;r) : f(x) = {}^1/_r\,(x-a).$$

Nótese que

$$\forall x, y \in S(a;r) : \|f(x) - f(y)\| = {}^1/_r\,\|x-y\|,$$

de manera que f es uniformemente continua en $S(a;r)$, por satisfacer allí una condición de Lipschitz.

Por otra parte, vemos que

$$\forall x \in S(a;r) : ||f(x)|| = 1,$$

lo cual indica que el rango $f[S(a;r)] \subset S(\theta;1)$.

Pero, recíprocamente, si $z \in S(\theta;1)$, se comprueba directamente que $a+rz \in S(a;r)$, $f(a+rz) = z$.

En resumen, f es uniformemente continua en $S(a;r)$ y su rango es $S(\theta;1)$; luego, la superficie esférica $S(\theta;1)$ es precompacta (Teorema 2 de 6.6).

Tomemos un número real α con $0 < \alpha < 1$; entonces existe un conjunto finito de puntos $x_1, x_2, \cdots, x_n \in S(\theta;1)$ tales que

$$S(\theta;1) \subset \overset{n}{\underset{i=1}{U}} \text{(de unión de conjuntos) } N(x_i;\alpha). \tag{1}$$

Ahora bien, sea S el subespacio generado por los vectores $x_1, x_2, \cdots, x_n$; S es entonces de dimensión finita y, en virtud del corolario 3′, es cerrado. Si S no coincide con H, se aplica el lema 2 de 7.1 y existe un $z \in H$ con $||z|| = 1$, es decir, $z \in S(\theta;1)$, tal que

$$\forall x \in S : ||x-z|| > \alpha;$$

en particular,

$$||x_i - z|| > \alpha \ (i = 1, 2, \cdots, n),$$

lo cual indica que

$$z \notin N(x_i;\alpha) \ \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

contradiciendo (1). De manera que S debe coincidir con H y H es de dimensión finita.

Se deduce que, en un espacio normado H, todas las esferas abiertas son precompactas, lo que equivale a decir que H es de dimensión finita, o bien ninguna esfera abierta es precompacta y el espacio no es de dimensión finita.

Del lema 2 se extraen dos consecuencias directas que merecen destacarse. La primera es el hermoso recíproco del Teorema 5.

Consecuencia 1. Si en un espacio normado H todo conjunto acotado es precompacto, entonces H es de dimensión finita.

DEMOSTRACIÓN. Cualquier esfera abierta de H es precompacta, por ser acotada, y se aplica el lema 2. ●

El próximo resultado es interesante y curioso.

Consecuencia 2. Si el espacio normado H no es de dimensión finita, entonces todos sus conjuntos precompactos son fronterizos.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que A es un conjunto precompacto.

Si $\mathring{A} \neq \phi$, tomamos un $a \in \mathring{A}$ y debe existir un $r > 0$ tal que $N(a; r) \subset A$; pero entonces $N(a; r)$ es precompacta (Teorema 2 de 4.2), y H es de dimensión finita, en virtud del lema 2.

Luego, debe ser $\mathring{A} = \phi$, lo que equivale a decir que A es fronterizo (P_6 de 2.7). ●

Por último, se observa que en el cuadro de 5.5, que resume los resultados sobre compacidad, puede substituirse toda vez que aparece R^n por ENDF (espacio normado de dimensión finita), conservándose la validez. Más aún, podemos asegurar que, al menos con espacios normados, no es posible generalizar.

7.5. PRODUCTO DE DOS ESPACIOS NORMADOS

Se trata, esencialmente, de construir un nuevo espacio normado con ayuda de otros dos. Algo muy similar se realiza con espacios métricos y, en tal sentido, véanse los ejercicios 52, 53, 54 y 55 del capítulo VI.

Son muchos e interesantes los resultados que pueden establecerse sobre el espacio producto. Sin embargo, nos limitaremos aquí a un propósito muy concreto; el de operar con límites de sucesiones y funcionales y con funciones continuas, aprovechando las ventajas que ofrece trabajar con formas bilineales continuas.

Consideremos dos espacios normados H y K y formemos el producto cartesiano $H \times K$ de ambos conjuntos. Nos proponemos conferir a $H \times K$ estructura de espacio normado, de forma tal que ésta dependa de las estructuras de H y K.

Comenzamos por convertir a $H \times K$ en espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales, al igual que H y K.

Esto es sencillo; si (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in H \times K$, $\lambda \in R$ son cualesquiera, definimos $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$.

Es rutinario y mecánico comprobar que $H \times K$ es un espacio vectorial con respecto a esas leyes de composición y se deja al lector.

Debemos ahora proveer al espacio vectorial $H \times K$ de una norma. Proporcionamos tres. En efecto, para un vector genérico $(x, y) \in H \times K$, se definen

$$\|(x, y)\| = \text{máx}\,\{\|x\|, \|y\|\}$$
$$\|(x, y)\|_1 = \|x\| + \|y\|$$
$$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}.$$

De nuevo dejamos al lector la simple tarea de verificar que cada una constituye un norma para $H \times K$.

Se ve de inmediato que, para todo $(x, y) \in H \times K$, se cumple

$$\|(x, y)\| \leq \|(x, y)\|_2 \leq \|(x, y)\|_1 \leq 2\|(x, y)\|,$$

lo cual implica, en virtud de la observación hecha en seguida del Teorema 1 de 7.4, que los espacios normados formados por $H \times K$, con respecto a cada una de esas tres normas, son isótopos entre sí. Se deduce que podemos elegir con libertad cualquiera de ellos y los resultados que se establezcan para el favorecido serán automáticamente válidos para los otros dos. Por propiciar las demostraciones más sencillas, escogemos la primera norma definida y, de aquí en adelante, al referirnos al *espacio normado producto* $H \times K$, se entenderá que es con respecto a esa norma, sin necesidad de expresarlo en cada caso.

Si H y K son ambos de dimensiones finitas, elijamos bases $\{e_1, \cdots, e_n\}$, $\{\xi_1, \cdots, \xi_p\}$, respectivamente. Resulta trivial comprobar que el conjunto $\{(e_1, \theta), \cdots, (e_n, \theta), (\theta, \xi_1), \cdots, (\theta, \xi_p)\}$ constituye una base para el espacio $H \times K$, cuya dimensión es, por lo tanto, finita e igual a la suma de las dimensiones de H y K. Nótese además que las bases de H y K inducen, en forma muy natural, una base para $H \times K$.

Volviendo al caso general, donde H y K son espacios normados cualesquiera, procedemos a considerar ciertas transformaciones lineales de mucha utilidad.

Las funciones $pr_1 : H \times K \to H$, $pr_2 : H \times K \to K$, que reciben el nombre de *proyecciones canónicas,* se definen de la siguiente manera; para todo

$$(x, y) \in H \times K : pr_1(x, y) = x, pr_2(x, y) = y.$$

Es claro que ambas son transformaciones lineales sobreyectivas, aunque no inyectivas en general. Por otra parte, se ve de inmediato que

$$\|pr_i(x, y)\| \leq \|(x, y)\| \ (i = 1, 2),$$

lo cual implica la continuidad de las dos proyecciones canónicas en virtud del Teorema 2 de 7.3.

Otras funciones convenientes son las *inyecciones canónicas*

$$b_1 : H \to H \times K, b_2 : K \to H \times K,$$

tales que

$$\forall x \in H : b_1(x) = (x, \theta),$$
$$\forall y \in K : b_2(y) = (\theta, y).$$

Salta a la vista que ambas son transformaciones lineales inyectivas y que sus rangos respectivos son los subespacios $H \times \{\theta\}$, $\{\theta\} \times K$. No son pues, en general, sobreyectivas. También resulta obvio que

$$||b_1(x)|| = ||x||, ||b_2(y)|| = ||y||,$$

implicando la continuidad de b_1 y b_2, de nuevo por el Teorema 2 de 7.3.

Las proyecciones e inyecciones canónicas se relacionan mediante sencillas e interesantes expresiones que presentamos a continuación. Su veracidad se comprueba directamente y queda en manos del lector.

a) $pr_1 \circ b_1 = I,\ pr_2 \circ b_2 = I,$
b) $pr_1 \circ b_2 = \Theta,\ pr_2 \circ b_1 = \Theta,$
c) $b_1 \circ pr_1 + b_2 \circ pr_2 = I.$

Sea $\{z_n\}$ una sucesión en el espacio producto $H \times K$. Ella determina una sucesión $\{x_n\} = \{pr_1(z_n)\}$ en H y otra $\{y_n\} = \{pr_2(z_n)\}$ en K. La fórmula c) nos indica que

$$\forall n \in N : z_n = (b_1 \circ pr_1 + b_2 \circ pr_2)(z_n) = b_1(x_n) + b_2(y_n) = (x_n, y_n).$$

Recíprocamente, una sucesión $\{x_n\}$ en H y una $\{y_n\}$ en K definen una sucesión $\{z_n\}$ en $H \times K$ tal que

$$\forall n \in N : z_n = b_1(x_n) + b_2(y_n) = (x_n, y_n).$$

Ahora bien, si $z_n \to z = (x, y) \in H \times K$, la continuidad de las proyecciones y el Teorema 2 de 6.1 implican

$$x_n = pr_1(z_n) \to pr_1(z) = x,\ y_n = pr_2(z_n) \to pr_2(z) = y.$$

Si $\{z_n\}$ es de Cauchy, la continuidad uniforme de las proyecciones, junto con el Teorema 3 de 6.6, nos dice que las sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ son también de Cauchy.

Supongamos ahora que $x_n \to x$ en H, $y_n \to y$ en K. Las sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ determinan la sucesión $\{z_n\} = \{(x_n, y_n)\}$ en $H \times K$, lo que sabemos es equivalente a $z_n = b_1(x_n) + b_2(y_n)$, $\forall n \in N$. Conociendo la continuidad de b_1, b_2 y aplicando de nuevo el Teorema 2 de 6.1, tenemos que

$$b_1(x_n) \to b_1(x), \; b_2(y_n) \to b_2(y).$$

El lema 1 de 7.1 nos dice entonces que

$$z_n = b_1(x_n) + b_2(y_n) \to b_1(x) + b_2(y) = (x, y).$$

Consideremos, por último, que $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ son sucesiones de Cauchy en H y K respectivamente. Veamos que la sucesión $\{z_n\} = \{(x_n, y_n)\}$ también resulta de Cauchy, aunque la comprobación deberá ser más directa. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, podemos hallar un $\nu \in N$ tal que

$$\forall n, n' \geq \nu : \|x_n - x_{n'}\| < \varepsilon, \; \|y_n - y_{n'}\| < \varepsilon,$$

de donde

$$\forall n, n' \geq \nu :$$
$$\|z_n - z_{n'}\| = \|(x_n - x_{n'}, y_n - y_{n'})\| = \text{máx}\,\{\|x_n - x_{n'}\|, \|y_n - y_{n'}\|\} < \varepsilon.$$

En resumen, $z_n = (x_n, y_n) \to z = (x, y)$ si y sólo si $x_n \to x$, $y_n \to y$. Así mismo, es condición necesaria y suficiente para que $\{z_n\} = \{(x_n, y_n)\}$ sea de Cauchy en $H \times K$ que ambas sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sean de Cauchy en H y K respectivamente.

Estos hechos conducen, entre otras cosas, al siguiente teorema.

Teorema 1. El espacio producto $H \times K$ es de Banach si y sólo si los espacios H y K son de Banach.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que los espacios H y K son de Banach y sea $\{z_n\} = \{(x_n, y_n)\}$ una sucesión de Cauchy en el espacio producto $H \times K$. Por lo establecido, las sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ son ambas de Cauchy y, por tanto, convergen, pero sabemos que ello implica la convergencia de $\{z_n\}$ y $H \times K$ es un espacio de Banach.

Recíprocamente, $H \times K$ es un espacio de Banach y sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sucesiones de Cauchy en H y K respectivamente. La sucesión $\{(x_n, y_n)\}$ es entonces de Cauchy en $H \times K$ y, por consiguiente, convergente; luego convergen $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ y los espacios H y K son de Banach.

Recordemos que la ley de composición interna "suma" en un espacio normado cualquiera H es una función $s : H \times H \to H$ tal que

$$\forall x, y \in H : s(x, y) = x + y.$$

Los axiomas definitorios de espacio vectorial le atribuyen a s un conjunto de propiedades de carácter algebraico. Más aún, confiriendo a $H \times K$ la estructura de espacio vectorial en la forma que se ha descrito, se verifica directamente que s es una transformación lineal; topológicamente y considerando a $H \times K$ como el espacio normado producto, observamos que

$$\text{A} \qquad (x, y) \in H \times H : \|s(x, y)\| = \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2\|(x, y)\|,$$

lo que nos dice que s es una transformación lineal continua (Teorema 2 de 7.3). Por otra parte, s es singular, ya que, claramente, no es inyectiva.

Sea ahora (E, d) un espacio métrico y H, K normados. Consideremos una función $f : A \subset E \to H \times K$. Se origina un par de funciones

$$f_1 : A \subset E \to H, \; f_2 : A \subset E \to K$$

que denominamos *funciones coordenadas de* f y se definen como

$$f_1 = pr_1 \circ f, \; f_2 = pr_2 \circ f. \tag{1}$$

Empleando la fórmula c) podemos también reconstruir f de sus funciones coordenadas:

$$f = (b_1 \circ pr_1 + b_2 \circ pr_2) \circ f = b_1 \circ f_1 + b_2 \circ f_2, \tag{2}$$

de donde se deduce que

$$\forall x \in A : f(x) = (f_1(x), f_2(x)).$$

En particular, de (1) y (2) se infiere claramente que, si (E, d) es un espacio normado también y $A = E$, entonces f es una transformación lineal si y sólo si f_1, f_2 son ambas transformaciones lineales.

Volviendo al caso general planteado, nótese que se cumple la propiedad siguiente,

$$\forall x, y \in A :$$
$$\|f(x) - f(y)\| = \text{máx}\,\{\|f_1(x) - f_1(y)\|, \|f_2(x) - f_2(y)\|\}.$$

De allí se deducen en seguida, mediante razonamientos rutinarios que se encomiendan al lector, que en todo punto de A, donde sean continuas f_1, f_2 a la vez, es continua f y si f_1, f_2 son uniformemente continuas en A también lo es f.

Por otra parte, supongamos que, para algún $a \in A'$, existen

$$\lim_{x \to a} f_i(x) = \omega_i \quad (i = 1, 2),$$

entonces, como b_1, b_2 son continuas, tenemos

$$\lim_{x \to a} b_i \circ f_i(x) = b_i(\omega_i) \quad (i = 1, 2),$$

(Teorema 3 de 6.1). Ahora bien, en virtud del Teorema 2 de 5.7 (proposición 1), para toda sucesión $\{x_n\}$ en A con $x_n \to a$, se tiene

$$b_i \circ f_i(x_n) \to b_i(\omega_i) \quad (i = 1, 2);$$

ello implica que

$$f(x_n) = b_1 \circ f_1(x_n) + b_2 \circ f_2(x_n) \to b_1(\omega_1) + b_2(\omega_2),$$

es decir,

$$f(x_n) \to (\omega_1, \omega_2),$$

según el lema 1 de 7.1. Luego,

$$\lim_{x \to a} f(x) = (\omega_1, \omega_2),$$

por el Teorema 2 de 5.7 (proposición 2).

Recíprocamente, si para un $a \in A'$ existe $\lim_{x \to a} f(x) = (\omega_1, \omega_2)$, entonces, por las fórmulas (1), la continuidad de las proyecciones canónicas y el Teorema 3 de 6.1, concluimos que existen

$$\lim_{x \to a} f_i(x) = pr_i(\omega_1, \omega_2) = \omega_i \quad (i = 1, 2).$$

Análogamente, las fórmulas (1) y el Teorema 4 de 6.1 nos dicen que en todo punto de A, donde sea continua f, son continuas ambas funciones coordenadas. Y de nuevo (1) con el Teorema 1 de 6.6 indican que si f es uniformemente continua en A también lo son f_1 y f_2.

Procedemos ahora a considerar una clase de funciones de particular importancia y utilidad que se presenta en relación con espacios producto.

Sean H, K y G espacios normados. Una función $v : H \times K \to G$ que satisface la siguiente propiedad,

$$\forall \alpha, \alpha', \beta, \beta' \in R, \ \forall x, x' \in H, \ \forall y, y' \in K:$$

$$v(\alpha x+\alpha' x', \beta y+\beta' y') = \alpha\beta v(x,y) + \alpha\beta' v(x,y') + \alpha'\beta v(x',y) + \alpha'\beta' v(x',y')$$

se denomina *forma bilineal*. Una manera más breve pero menos precisa de enunciar la propiedad que caracteriza la forma bilineal es decir que v es una "transformación lineal con respecto a cada variable cuando la otra se mantiene fija". Esto puede comprobarse haciendo primero $\beta = 1$, $\beta' = 0$ y luego $\alpha = 1$, $\alpha' = 0$.

Conviene declarar, cuanto antes, que una forma bilineal no es una transformación lineal de $H \times K$ en G.

Como ejemplo, consideremos el "producto por un escalar". En un espacio normado (basta con que sea vectorial) H, la función $u : R \times H \to H$, tal que

$$\forall \alpha \in R, \ \forall x \in H : u(\alpha, x) = \alpha x,$$

es una forma bilineal; simple observación de los axiomas definitorios de espacio vectorial.

También inmediato de su propia definición, el producto interior

$$p : H \times H \to R \ (p(x,y) = x \cdot y),$$

en un espacio euclídeo H, es una forma bilineal.

Las formas bilineales son extraordinariamente ricas en propiedades algebraicas, cuyo tratamiento estimamos fuera de lugar en esta obra. De sus propiedades topológicas, también muy abundantes, sólo veremos la caracterización de su continuidad.

Antes, nótese que, si $v : H \times K \to G$ es una forma bilineal, se infiere directamente de la definición que

$$\forall x \in H : v(x, \theta) = \theta, \ \forall y \in K : v(\theta, y) = \theta.$$

Teorema 2. Una forma bilineal $v : H \times K \to G$ es continua en $H \times K$ si y sólo si existe un número real $k > 0$ tal que

$$\forall (x,y) \in H \times K : \|v(x,y)\| \leq K \|x\| \cdot \|y\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que se cumple la desigualdad en el enunciado y demostremos la continuidad de v en un punto genérico $(x_0, y_0) \in H \times K$.

Dado $\varepsilon > 0$, tomemos

$$0 < \delta < \text{mín}\,\{1, \varepsilon/(1 + \|x_0\| + \|y_0\|)k\}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&\forall (x, y) \in H \times K \text{ con } \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta : \\
&\|v(x, y) - v(x_0, y_0)\| = \|v(x - x_0, y_0) + v(x, y - y_0)\| \leq \\
&\leq \|v(x - x_0, y_0)\| + \|v(x, y - y_0)\| \leq k(\|x - x_0\| \cdot \|y_0\| + \|x\| \cdot \|y - y_0\|) \leq \\
&\leq k(\|x\| + \|y_0\|) \cdot \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < k\delta(\|x\| + \|y_0\|);
\end{aligned}$$

pero

$$\|x\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0\| \leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\| + \|x_0\| < 1 + \|x_0\|$$

entonces

$$\|v(x, y) - v(x_0, y_0)\| < k\delta(1 + \|x_0\| + \|y_0\|) < \varepsilon.$$

Recíprocamente, v es continua en $H \times K$ y, por tanto, en $(\theta, \theta) \in H \times K$; luego, dado $\varepsilon = 1$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\forall (x, y) \in H \times K \text{ con } \|(x, y)\| < \delta : \|v(x, y)\| < 1.$$

Ahora bien, si

$$(x, y) \in H \times K, x \neq \theta, y \neq \theta,$$

entonces

$$\left\| \delta/2 \left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right) \right\| = \delta/2 < \delta,$$

de donde

$$\left\| v \left(\frac{\delta x}{2\|x\|}, \frac{\delta y}{2\|y\|} \right) \right\| < 1,$$

o sea

$$\frac{\delta^2}{4\|x\| \cdot \|y\|} \|v(x, y)\| < 1,$$

es decir

$$\|v(x, y)\| < (4/\delta^2) \|x\| \cdot \|y\|.$$

Designando por $k = 4/\delta^2$ y observando que si $x = \theta$ ó $y = \theta$ ambos miembros de la última desigualdad se hacen cero, concluimos que

$$\forall (x, y) \in H \times K : \|v(x, y)\| \leq k\|x\| \cdot \|y\|.$$

Aplicando el teorema precedente, establecemos en seguida la continuidad del "producto por un escalar" $u : R \times H \to H$ que consideramos atrás como ejemplo de forma bilineal. En efecto, es una de las propiedades en la definición de norma que

$$\forall \alpha \in R, \forall x \in H : \|u(\alpha, x)\| = \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

Así mismo, es continuo el producto interior $p : H \times H \to R$, también visto como ejemplo de forma bilineal, en el caso de un espacio euclídeo H. Aquí la continuidad equivale, según el Teorema 2, ni más ni menos que a la desigualdad de Schwartz (véase el ejemplo 4 de 1.1):

$$\forall x, y \in H : |p(x, y)| = |x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Con los resultados establecidos en esta sección pueden obtenerse, con economía de trabajo y elegancia, todas las llamadas operaciones con límites de sucesiones, funcionales y funciones continuas.

Por ejemplo, considérense dos sucesiones convergentes $x_n \to x$, $y_n \to y$, en un espacio normado H y sucesiones reales $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$. Queremos demostrar que $\alpha_n x_n + \beta_n y_n \to \alpha x + \beta y$. En efecto, como la función (forma bilineal) "producto por un escalar" $u : R \times H \to H$ es continua y

$$(\alpha_n, x_n) \to (\alpha, x), (\beta_n, y_n) \to (\beta, y) \text{ en } R \times H,$$

entonces

$$u(\alpha_n, x_n) = \alpha_n x_n \to u(\alpha, x) = \alpha x, \; u(\beta_n, y_n) = \beta_n y_n \to u(\beta, y) = \beta y.$$

Ahora aplicamos la continuidad de la suma $s : H \times H \to H$ y obtenemos

$$\alpha_n x_n + \beta_n y_n = s(\alpha_n x_n, \beta_n y_n) \to s(\alpha x, \beta y) = \alpha x + \beta y.$$

Si H fuese euclídeo demostraríamos de manera similar que $x_n \cdot y_n \to x \cdot y$, haciendo uso de la continuidad del producto interior.

Veamos otra aplicación ilustrativa. Sea (E, d) un espacio métrico y H euclídeo. Dadas tres funciones $f, g, h : A \subset E \to H$, se desea probar la continuidad de $\omega : A \subset E \to H$, tal que

$$\forall x \in A : \omega(x) = (f(x) \cdot g(x)) h(x),$$

suponiendo continuas f, g, h en A.

La función $\varphi : A \subset E \to H \times H$, determinada por sus funciones coordenadas $\varphi_1 = f$, $\varphi_2 = g$, es continua en A; luego, también lo es la función

compuesta $p \circ \varphi : A \subset E \to R$, donde p es el producto interior en H (Teorema 1 de 6.2) y, en consecuencia, la función $\psi : A \subset E \to R \times H$, cuyas funciones coordenadas son $\psi_1 = p \circ \varphi$, $\psi_2 = h$, es continua en A, así como la función compuesta $u \circ \psi : A \subset E \to H$, donde u es el "producto por un escalar". Pero basta verificar que $\omega = u \circ \psi$.

Más aplicaciones pueden verse en los ejercicios.

EJERCICIOS

1. Probar que el diámetro de una superficie esférica, en un espacio normado, es dos veces su radio.

2. Comprobar que un subespacio no trivial (contiene vectores distintos de θ) de un espacio normado no es un conjunto acotado.

3. Sea S un subespacio del espacio normado H con $S \neq H$. Demostrar que la frontera $\beta(S)$ es un subespacio.

4. Dada una sucesión $\{a_n\}$ en el espacio normado H, se denomina *serie* de términos a_n a la sucesión $\{s_n\}$ tal que

$$\forall n \in N : s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n.$$

La serie se dice convergente si converge $\{s_n\}$ y su límite se llama *suma* de la serie. Se emplea la notación $\sum a_n$ para designar la serie.
Nótese que $\sum a_n$ da origen a la serie $\sum \|a_n\|$ en la recta real. Si esta última converge, decimos que $\sum a_n$ es *absolutamente convergente*.
Demuéstrense las siguientes implicaciones:

a) $\sum a_n$ convergente $\Longrightarrow a_n \to \theta$.
b) $\sum a_n$ absolutamente convergente y H de Banach $\Longrightarrow \sum a_n$ convergente.

5. Sea H un espacio normado, A y B conjuntos no vacíos de H. Se define

$$A+B = \{x+y \mid x \in A, y \in B\}.$$

Probar las siguientes implicaciones:

1) A abierto y B cualquiera $\Longrightarrow A+B$ abierto.
2) A y B compactos $\Longrightarrow A+B$ compacto.

3) A compacto y B cerrado $\Longrightarrow$ $A+B$ cerrado.
4) A y $A+B$ compactos $\Longrightarrow$ B relativamente compacto.

(*Sugerencia:* Compacidad secuencia en 2), 3) y 4).)

6. Demostrar que, si $T : H \to K$ es una transformación lineal (no necesariamente continua) y A es un conjunto convexo de H, entonces $T(A)$ es convexo.

7. Demostrar que la intersección en una familia cualquiera de conjuntos convexos es convexa.

8. Probar que todo conjunto no vacío de un espacio normado está contenido en un conjunto convexo "mínimo", que se denomina su *casco convexo*.

9. Sea A un conjunto convexo de un espacio normado H y $x_0 \in H$. Demostrar que $x_0+A = \{x_0+x \mid x \in A\}$ es convexo.

10. Si A y B son convexos, demuéstrese que, para $\alpha, \beta \in R$, el conjunto

$$\alpha A+\beta B = \{\alpha x+\beta y \mid x \in A, y \in B\}$$

es convexo.

11. Empleando la notación del ejercicio anterior, donde $\alpha, \beta \in R$ y A es un conjunto no vacío en un espacio normado, compruébese que

$$(\alpha+\beta)A \subset \alpha A+\beta A$$

y proporciónese un ejemplo en el cual la inclusión sea propia, aun con $\alpha, \beta > 0$.
Demuéstrese que, si A es convexo y $\alpha, \beta > 0$, entonces

$$(\alpha+\beta)A = \alpha A+\beta A.$$

12. Verificar que el conjunto $[x, \theta] \cup [\theta, y]$ en el espacio R^2, donde

$$x = (1,0), y = (0,1)$$

es arco-conexo y poli-conexo, pero no convexo.

13. Dados tres puntos $x, y, z \in H$, se denomina triángulo de vértices x, y, z al conjunto

$$T(x, y, z) = \underset{\omega \in [y, z]}{U} \text{ (de unión de conjuntos) } [x, \omega].$$

Demuéstrese que todo triángulo es convexo.

14. Se dice que un conjunto no vacío A de un espacio normado H es *estrellado* si existe un $c \in A$ (llamado *centro de estrella*) tal que

$$\forall x \in A : [c, x] \subset A.$$

Demuéstrese que todo conjunto convexo es estrellado y que todo estrellado es poli-conexo.
Dense ejemplos que pongan de manifiesto que los recíprocos no son, en general, ciertos.

15. Demostrar que la clausura de un conjunto estrellado es estrellada.

16. Sea $f : A \subset H \to K$ uniformemente continua en el conjunto estrellado A. Demostrar que existen números reales $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$\forall x \in A : \|f(x)\| < \alpha \|x\| + \beta.$$

(*Sugerencia:* Empléese la técnica del Teorema 2 de 7.2.)

17. Probar que el conjunto $A = \{(\cos t, \operatorname{sen} t) \in R^2 \mid t \in [0, \pi/2]\}$ es arco-conexo y no poli-conexo.

18. Sea $f : [0, \pi/2] \to R^2$ tal que

$$\forall t \in [0, \pi/2] : f(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t).$$

Demostrar que f es uniformemente continua en $[0, \pi/2]$ y verificar que su rango es arco-conexo, pero no poli-conexo.

19. Probar que una poligonal es un conjunto poli-conexo.

20. Demostrar que la unión en una familia de conjuntos poli-conexos cuya intersección no es vacía, es poli-conexa.

21. Sea A un conjunto no vacío de un espacio normado. Demostrar que cada $x \in A$ pertenece a un "máximo" conjunto poli-conexo contenido en A, el cual llamaremos componente poli-conexo de A.

Probar que los componentes poli-conexos constituyen una partición de A.

22. Demostrar que los componentes poli-conexos de un conjunto abierto son abiertos.

23. Demostrar que el núcleo de una transformación lineal continua y no nula es un conjunto nada-denso.

24. Sea $T : H \to G$ una transformación lineal continua y supongamos que $T = T_1 \circ T_2$ donde $T_2 : H \to K$ es una transformación lineal y $T_1 : K \to G$ es también lineal, además de continua e inyectiva. Demostrar que T_2 es continua.

25. Supongamos que la función $f : H \to K$ posee las propiedades (a) $\forall x, y \in H : f(x+y) = f(x) + f(y)$; (b) $f[N(\theta; 1)]$ es un conjunto acotado.
Demostrar que f es una transformación lineal continua.

26. Sea H un espacio normado de dimensión finita y S un subespacio que no coincide con H. Probar que existe un $z \in H$ con $||z|| = 1$ y $d(z, S) = 1$.

27. Demostrar que cada una de las propiedades enunciadas en los corolarios 5′, 5″, 5‴ de 7.4 implica la finito-dimensionalidad del espacio.

28. Dos espacios normados H y K se dicen *congruentes* si existe una isotopía $T : H \to K$ tal que

$$\forall x \in H : ||T(x)|| = ||x||. \qquad (1)$$

Compruébese que basta con que T sea una transformación lineal sobreyectiva que satisface (1).
Verifíquese que la congruencia es una relación de equivalencia.
Se dice que el espacio normado K es una completación de H si: (a) K es de Banach; (b) existe un subespacio denso de K que es congruente con H.
Demuéstrese:

1. Todo espacio normado admite una completación.
2. Dos completaciones de un mismo espacio normado son congruentes.

29. Probar que, si A y B son compactos en los espacios normados H y K respectivamente, entonces $A \times B$ es compacto en el espacio producto $H \times K$.

30. Si S es un subespacio de H y T un subespacio de K, demuéstrese que $S \times T$ es un subespacio de $H \times K$.

31. Sean $f, g : H \to K$ y se define $h : H \times H \to K$ tal que

$$\forall x, y \in H : h(x, y) = f(x) + g(y).$$

Demostrar que, si f y g son continuas en H, entonces h es continua en $H \times H$.

32. Sean $f, g : H \to K$, continuas en el espacio normado H y K es euclídeo. Probar que la función $h : H \times H \to R$ tal que

$$\forall x, y \in H : h(x, y) = f(x) \cdot g(y)$$

es continua en $H \times H$.

33. Sean $f, g : A \subset E \to H$, $\varphi, \psi : A \subset E \to R^{*}$ todas continuas en A (E es métrico y H normado).
Demostrar que la función $h : A \subset E \to H$, tal que

$$\forall x \in A : h(x) = \varphi(x) f(x) + \psi(x) g(x),$$

es continua en A.

34. Sean A y B conjuntos compactos de un espacio normado H. Demostrar que el conjunto

$$C = \underset{\substack{x \in A \\ y \in B}}{U} \text{ (de unión de conjuntos) } [x, y]$$

es compacto.

(*Sugerencia:* Considérese el espacio producto $H \times H$.)

Bibliografía

1. Bourbakí, N. *General Topology* (Parts I, II). Hermann-Addison. Wesley, 1966.
2. Bushaw, D. *Fundamentos de Topología General*. Limusa-Wiley, S. A. México, 1970.
3. Cartan, H. *Calcul différentiel dans les espaces de Banach*. Hermann. Collection Méthodes, París, 1967.
4. Cohen, L. W. y Ehrlich, G. *The Structure of the Real Number System*. Van Nostrand, N. J., 1963.
5. Copson, E. T. *Metric Spaces*. Cambridge University Press, Cambridge, 1968.
6. Choquet, G. *Topology*. Academic Press, Nueva York, 1966.
7. Dieudonné, J. *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press, Nueva York, 1960.
8. Dugundji, J. *Topology*. Allyn and Bacon, Boston, 1967.
9. Dunford N. y Schwartz, J. T. *Linear Operators* (Part I). Interscience, Nueva York, 1964.
10. Fréchet, M. *Les Espaces Abtraits*. Gauthier-Villars, París, 1928.
11. Gaal, S. A. *Point Set Topology*. Academic Press, Nueva York, 1964.
12. Goffman, C. y Pedrik, G. *First Course in Functional Analysis*. Prentice-Hall, N. J., 1965.
13. Greub, W. H. *Linear Algebra* (3ª ed.). Springer-Verlag, Nueva York, 1967.
14. Hall, D. W. y Spencer, G. L. *Elementary Topology*. Wiley, Nueva York, 1954.
15. Halmos, P. R. *Finite-Dimensional Vector Spaces*. Van Nostrand, Nueva York, 1958.
16. Halmos, P. R. *Naive Set Theory*. Van Nostrand, N. J., 1964.
17. Kelley, J. L. *General Topology*. Van Nostrand, Nueva York, 1955.
18. Kolmogorov, A. N. y Fomin, S. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, (Vol. I). Graylock Press, Rochester, 1957.
19. Lorch, E. R. *Spectral Theory*. Oxford University Press, Nueva York, 1962.

20. Maddox, I. J. *Elements of Functional Analysis*. Cambridge, University Press, Cambridge, 1970.
21. Mansfield, M. J. *Introduction to Topology*. Van Nostrand, Nueva York, 1963.
22. Mendelson, B. *Introduction to Topology*. Allyn and Bacon, Boston, 1968.
23. Pinter, Ch. C. *Set Theory*. Addison Wesley, Londres, 1971.
24. Robertson, A. P. y Robertson, W. J. *Topological Vector Spaces*. Cambridge University Press. Cambridge, 1964.
25. Schechter, M. *Principles of Functional Analysis*. Academic Press, Nueva York, 1971.
26. Schwartz, L. *Analyse Mathematique* (Vol. 1). Hermann, París, 1967.
27. Sominskii, I. S. *The Method of Mathematical Induction*. Blaisdell, Nueva York, 1961. (Traducción al español. *El método de la inducción matemática,* Limusa-Wiley, S. A., México, 1973.)
28. Steen, L. A. y Seebach, J. A. *Counterexamples in Topology*. Holt, Rinehart and Winston, Nueva York, 1970.
29. Suppes, P. *Axiomatic Set Theory*. Van Nostrand, N. J., 1965.
30. Taylor, A. E. *General Theory of Functions and Integration*. Blaisdell, Nueva York, 1965.
31. Taylor, A. E. *Introduction to Functional Analysis*. Wiley, Nueva York, 1961.
32. Wilanski, A. *Topology for Analysis*. Ginn, Londres, 1970.
33. Wilder, R. L. *Introduction to the Foundations of Mathematics*. Wiley, Nueva York, 1965.

Indice